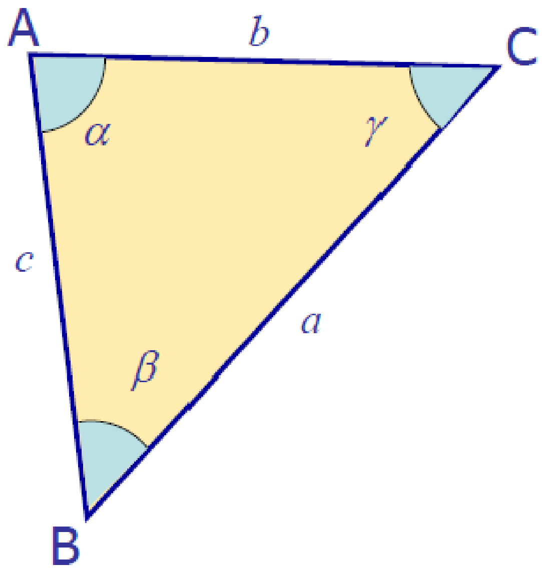
TRIANGOLI QUALUNQUE



Relazioni geometriche già note

La somma degli angoli di un triangolo è uguale all'angolo piatto: $\alpha + \beta + \gamma = 200^c$.

Ciascun lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza.

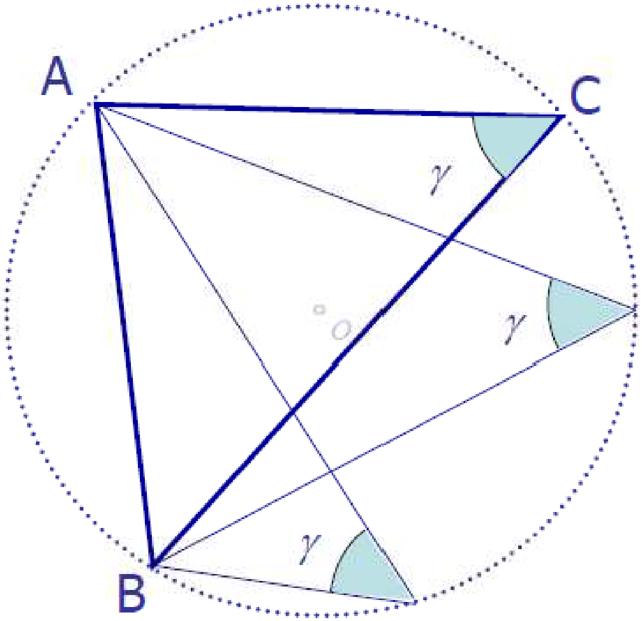
Una relazione d'ordine tra due lati vale anche tra i rispettivi angoli opposti.

Relazioni trigonometriche da studiare

teorema dei seni;

teorema del coseno (o di Carnot).

RIPASSO DI GEOMETRIA



PROPRIETA' 1

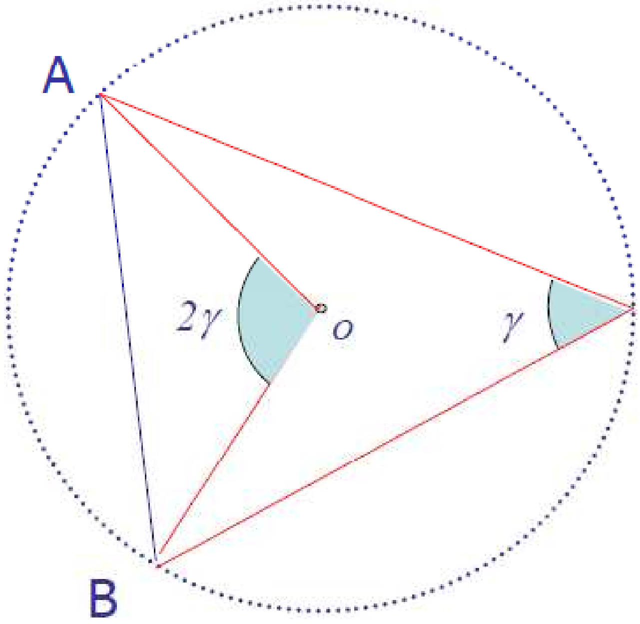
Per **tre punti non allineati** passa sempre una **circonferenza** ed una sola.

Tenendo fermo il lato AB, facciamo spostare il punto C, mantenendolo sulla circonferenza

PROPRIETA' 2

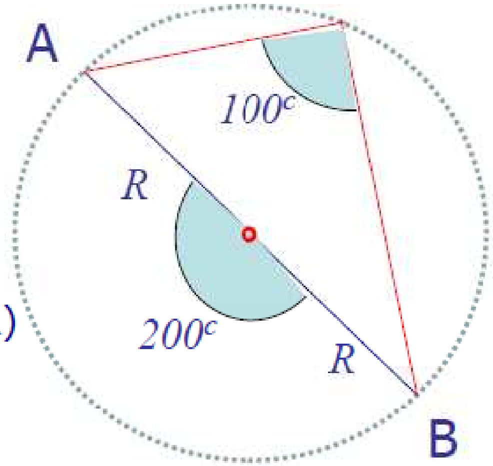
Tutti gli **angoli alla circonferenza** che insistono sulla **corda** AB sono **uguali** (γ).

RIPASSO DI GEOMETRIA



PROPRIETA' 3

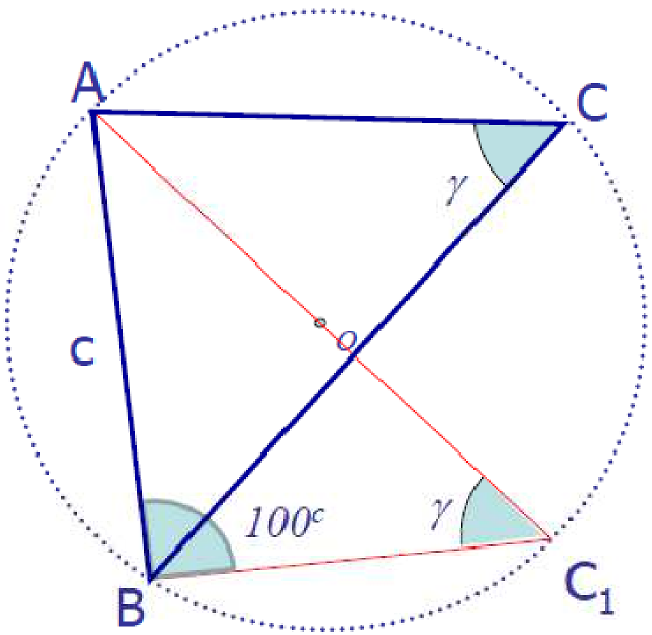
Data una **corda** AB, il suo **angolo al centro** è sempre **doppio** del corrispondente **angolo alla circonferenza**.



Se la corda AB passa per il centro (**diametro** 2R) l'angolo al centro è **piatto**, quindi l'angolo alla circonferenza è **retto**.

TEOREMA DEI SENI

Dato un triangolo ABC, si disegna la circonferenza che passa per i tre vertici (PROPRIETA' 1).



Tenendo ferma la corda AB si sposta il punto C sino alla posizione C_1 in modo che AC_1 passi per il centro O:

L'angolo γ non cambia (PROPRIETA' 2).

Il triangolo ABC_1 è rettangolo in B (PROPRIETA' 3).

AC_1 = ipotenusa = diametro = 2R

AB = cateto = c

QUINDI, tenendo fermo il lato AB = c si ottiene:

$$2R = \frac{c}{\sin\gamma}$$

TEOREMA DEI SENI

Il ragionamento sarebbe identico se si tenesse fermo il lato BC e, ancora, tenendo fermo il lato AC.

Tenendo fermo il lato AB = c

$$2R = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Tenendo fermo il lato BC = a

$$2R = \frac{a}{\sin\alpha}$$

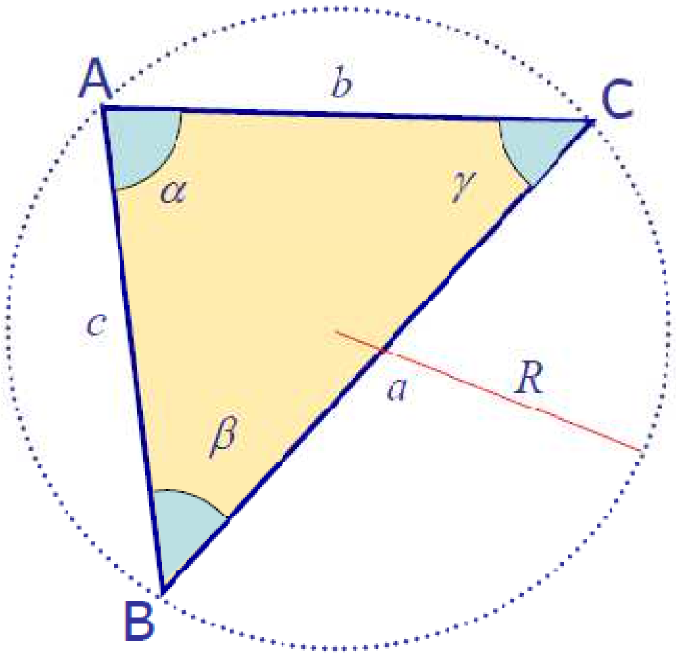
Tenendo fermo il lato AC = b

$$2R = \frac{b}{\sin\beta}$$

TEORAMA DEI SENI

ENUNCIATO DEL TEOREMA (da imparare a memoria)

IN UN TRIANGOLO QUALUNQUE IL RAPPORTO TRA UN LATO E IL SENO DELL'ANGOLO OPPOSTO È COSTANTE ED È UGUALE AL DIAMETRO DEL CERCHIO CIRCOSCRITTO AL TRIANGOLO.



$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

TEOREMA DEI SENI

formule inverse

Il teorema dei seni può servire per calcolare i lati

$$a = b\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = c\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \qquad b = a\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = c\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \qquad c = a\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = b\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$$

Il teorema dei seni può anche servire per calcolare gli angoli

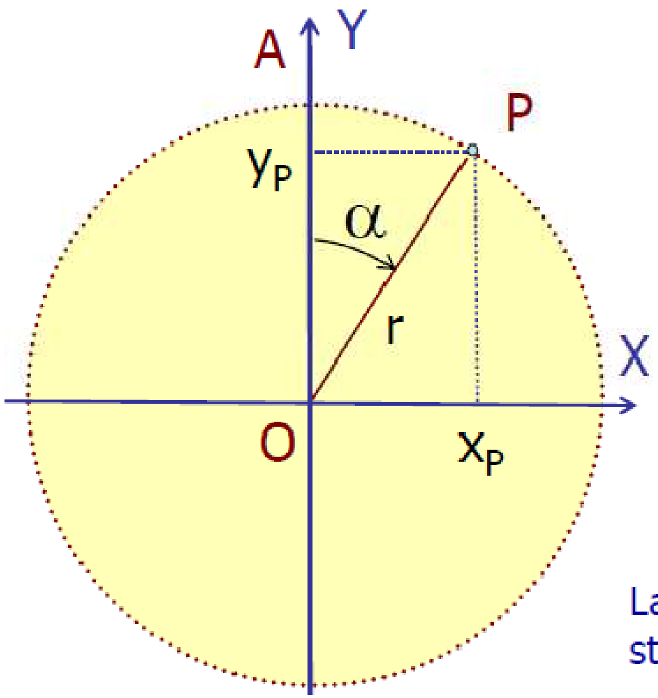
$$\alpha = \arcsin\left(\frac{a}{b}\sin\beta\right) = \arcsin\left(\frac{a}{c}\sin\gamma\right)$$

$$\beta = \arcsin\left(\frac{b}{a}\sin\alpha\right) = \arcsin\left(\frac{b}{c}\sin\gamma\right)$$

$$\gamma = \arcsin\left(\frac{c}{a}\sin\alpha\right) = \arcsin\left(\frac{c}{b}\sin\beta\right)$$

PRECISAZIONE DI GONIOMETRIA

RICORDA:



$$\mathrm{sen}\,\alpha \equiv x_P$$

$$\cos\alpha \equiv y_P$$

$$r = 1$$

Quindi, grazie a Pitagora

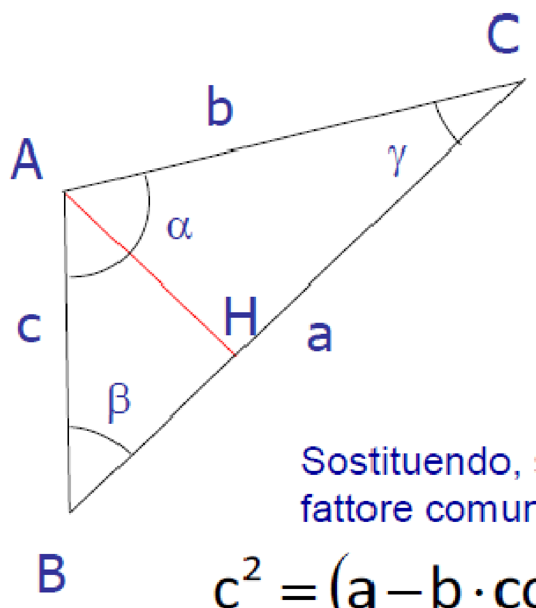
$$1^2 = 1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$$

E' la **prima relazione della goniometria**

La somma dei quadrati di seno e coseno dello stesso angolo vale sempre 1

TEOREMA DI CARNOT (DEL COSENO)

Dato un triangolo ABC, si disegna l'altezza AH rispetto alla base BC.



Per il triangolo rettangolo ABH si può scrivere:

$$c^2 = \overline{HB}^2 + \overline{AH}^2$$

D'altra parte è anche (triangolo rettangolo ACH):

$$\overline{HB} = a - \overline{HC} = a - b \cdot \cos\gamma$$

$$\overline{AH} = b \cdot \sin\gamma$$

Sostituendo, sviluppando il quadrato del binomio, raccogliendo a fattore comune, si ottiene:

$$c^2 = (a - b \cdot \cos\gamma)^2 + (b \cdot \sin\gamma)^2$$

$$c^2 = (a^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma + b^2 \cdot \cos^2\gamma) + (b^2 \cdot \sin^2\gamma)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \cdot (\sin^2\gamma + \cos^2\gamma) - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

TEOREMA DI CARNOT (DEL COSENO)

Infine, applicando la prima relazione fondamentale della goniometria, si ottiene:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

Ripetendo la stessa procedura rispetto al lato b e rispetto al lato a, si otterrebbe analogamente:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

ENUNCIATO DEL TEOREMA (da imparare a memoria)

IN UN TRIANGOLO QUALUNQUE, IL QUADRATO DI UN LATO È UGUALE ALLA SOMMA DEI QUADRATI DEGLI ALTRI DUE LATI, DIMINUITO DEL LORO DOPPIO PRODOTTO PER IL COSENO DELL'ANGOLO COMPRESO.

TEOREMA DI CARNOT (DEL COSENO)

formule inverse

Il teorema del coseno può servire per calcolare i lati

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha}$$

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta}$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma}$$

Il teorema del coseno può anche servire per calcolare gli angoli

$$\alpha = \arccos\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\beta = \arccos\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\gamma = \arccos\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$