7.4 Tensioni residue

7.4.1 Trave rettangolare inflessa

Il classico esempio della trave rettangolare inflessa viene qui svolto con riferimento ad un materiale con comportamento simmetrico a trazione e a compressione. Per la trattazione più generale si veda il Timoshenko.

Nella deformazione plastica delle travi si fanno alcune assunzioni semplificative, cioè che le sezioni inizialmente piane rimangano piane e che non ci siano sforzi secondari dovuti alla congruenza tra parte plasticizzata e parte elastica della trave.

Nel caso qui studiato si suppone che la sollecitazione esterna sia di puro momento flettente, che corrisponde ad una deformazione dell'asse della trave ad arco di circonferenza.

Si suppone assegnata una relazione sforzo-deformazione $\sigma = \sigma(\epsilon)$, simmetrica come si è detto, e che il carico iniziale sia applicato in maniera monotona.

Si ragioni in termini di deformazione iniziale imposta, con una graduale crescita della curvatura dell'asse della trave. Se la trave, inizialmente rettilinea, è deformata con un raggio di curvatura R_i la deformazione è

$$\epsilon = \frac{y}{R}.$$

Facendo intervenire la $\sigma = \sigma(\epsilon)$ si trova la relazione $\sigma = \sigma(\epsilon(y)) = \sigma(y)$ tra tensione e dimensione trasversale della trave. Se la deformazione massima $\epsilon_{max} = h/R > \epsilon_{is} = \sigma_y/E$, dove h è la semialtezza della trave e ϵ_{is} è la deformazione che corrisponde all'inizio dello snervamento, una parte della trave, cioè quella con $|y| > h_y$, essendo h_y la distanza dall'asse neutro della fibra in snervamento, è plasticizzata.

In ogni caso il momento flettente, se b è la larghezza, è

$$M = \int_{-h}^{h} \sigma b y \mathrm{d}y. \tag{1}$$

Nel caso puramente elastico $\sigma = E\epsilon = Ey/R_i$, per cui

$$M = \int_{-h}^{h} \frac{Ey}{R_i} b y \mathrm{d}y$$

cioè

$$M = \frac{EI}{R_i}. \tag{2}$$

Nel caso plastico conviene elaborare la (1) sostituendo alla variabile muta y la ϵ. Si trova allora

$$M = \int_{-h/R_i}^{h/R_i} \sigma b \cdot \epsilon R_i \cdot R_i \mathrm{d}\epsilon = bR_i^2 \int_{-h/R_i}^{h/R_i} \sigma\epsilon \mathrm{d}\epsilon$$

che formalmente può essere posta in una forma identica alla (2), ossia

$$M = \frac{E_{R_i} I}{R_i}. \tag{2'}$$

con la posizione

$$E_{R_i} = \frac{3R^3}{2h^3} \int_{-h/R_{pl}}^{h/R_{pl}} \sigma\epsilon \mathrm{d}\epsilon$$

Non è difficile vedere che vale $E_{R_i} \leq E$, valendo il segno di uguaglianza solo nel caso elastico.

Se si scarica la trave applicando un momento $-M$ il comportamento allo scarico è elastico (a meno che il momento non sia molto alto, nel qual caso interviene l'effetto Bauschinger). La curvatura residua è data dalla somma di quella iniziale e quella della fase di scarico elastico

$$\frac{1}{R_f} = \frac{1}{R_i} - \frac{M}{EI} = \frac{M}{I}\left(\frac{1}{E_{R_i}} - \frac{1}{E}\right)$$