6.3 Applicazioni

Trave snella caricata di punta

Il carico critico è

$$F_{cr} = C\frac{\pi^2 E\, I}{l^2}$$

dove I è il momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse lungo il quale si prevede avvenga l'inflessione (tranne casi particolari di vincolo si prende il valore minimo di I).

con

$$C = \begin{cases} 1/4 & \text{per trave incastrata a un estremo e libera all'altro} \\ 1 & \text{per trave incernierata- incernierata} \\ 4 & \text{per trave incastrata- incastrata} \\ 2 & \text{per trave incernierata- incastrata} \end{cases}$$

In caso di incertezza è bene prendere C il più piccolo possibile, e comunque di non salire al disopra di $C = 1$.

Travi tozze

Si usano formule empiriche come la seguente di J.B. Johnson:

$$F_{cr} = \sigma_y A(1 - \frac{\sigma_y (l/\rho)^2}{4C\pi^2 E})$$

con ρ raggio d'inerzia minimo della sezione. Questa formula è valida per valori di l/ρ minori di

$$(l/\rho)_{lim} = \sqrt{\frac{2\pi^2 CE}{\sigma_y}} \tag{5}$$

Al di sopra si deve usare la formula di Eulero.

Metodo omega

Nella formula di Eulero si può mettere l'area A in evidenza scrivendo

$$F_{cr} = C\pi^2 EA\frac{\rho^2}{l^2}$$

dove ρ è il raggio giratore ed l/ρ si chiama snellezza e si indica con λ. Dividendo per A si ottiene

$$\sigma_{cr} = \frac{C\pi^2 E}{\lambda^2}.$$

Per la stabilità dell'equilibrio deve essere, tenuto conto di un coefficiente di sicurezza s,

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq \frac{\sigma_{cr}}{s}$$

Moltiplicando per

$$\omega = \frac{\sigma_y}{\sigma_{cr}}$$

risulta

$$\omega\sigma = \omega\frac{N}{A} \leq \frac{\sigma_y}{s}$$

essendo $\sigma_y/s = \sigma_{amm}$, si può scrivere

$$\omega\frac{N}{A} \leq \sigma_{amm}$$

il che significa che, quando si teme l'instabilità il carico assiale di compressione N deve essere moltiplicato per un coefficiente ω maggiore di 1. La verifica di sytabilità è identica a quella classica a sforzo normale, purché si tenga conto di un carico assiale 'maggiorato'.

Il valore di ω può essere ottenuto rielaborando le formule precedenti; per esempio la formula di Eulero fornisce

$$\omega = \frac{\lambda^2 \sigma_y}{C\pi^2 E} \tag{6}$$

e la formula di Johnson

$$\omega = \frac{1}{1 - \dfrac{\lambda^2 \sigma_y}{4C\pi^2 E}} \tag{6'}$$

Il valore di λ per cui si passa dalla (6) alla (6') è dato dalla (5).

Però di solito il valore di ω in funzione di λ è dato da tabelle della normativa.

Cilindri compressi uniformemente dall'esterno

Si usa la seguente formula dovuta a Von Mises, 1914:

$$p_{cr}(n) = E\left[\frac{1}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{t}{r}\right)^3 \left(n^2 - 1 + \frac{2n^2 - 1 - \nu}{(\frac{n}{\pi}\frac{l}{r})^2 + 1}\right) + \frac{t/r}{(n^2-1)\left[\left(\frac{n}{\pi}\frac{l}{r}\right)^2 + 1\right]^2}\right]$$

in cui n è il numero di lobi della deformata t è lo spessore .

Se l è notevolmente maggiore di r si pone (formula di Southwell):

$$p_{cr}(n) = E\left[\frac{1}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{t}{r}\right)^3 (n^2 - 1) + \frac{t/r}{(n^2-1)\left(\frac{n}{\pi}\frac{l}{r}\right)^4}\right]$$

Per entrambe queste formule occorre trovare per tentativi il valore minimo di n che rende minimo p_{cr}. Se il tubo è di lunghezza molto grande si può usare l'approssimazione per $L = \infty$, cioè

$$p_{cr} = \frac{Et^3}{4(1-\nu^2)r^3}.$$

In questo caso è $n = 2$.

Cilindri compressi in senso assiale

Deformata a soffietto

$$\sigma_{cr} = \frac{1}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \times \frac{Et}{r} = 0.605\frac{Et}{r}$$

Lastre rettangolari appoggiate lungo il bordo

Se a è l'altezza della lastra (dimensione parallela alla forza instabilizzante) e b è la larghezza (dimensione perpendicolare alla forza instabilizzante), la tensione critica è

$$\sigma_{cr} = \left(\frac{nb}{a} + \frac{a}{nb}\right)^2 \frac{\pi^2}{12}\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{t^3}{b^3}\right)$$

I bordi della piastra instabilizzata rimangono fermi, mentre la parte centrale presenta n imbozzamenti, alternativamente verso l'interno e verso l'esterno. Il numero n deve essere determinato per tentativi con la condizione di prendere il valore di n che rende minimo σ_{cr}. Come valore di orientamento si prende n circa uguale alla parte intera di a/b.

Tubi cilindrici di raggio r e spessore t soggetti a torsione

$$(M_t)_{cr} = E\frac{\pi\sqrt{2}}{3(1-\nu^2)^{3/4}} t^2\sqrt{rt} = 1.481\frac{Et^{5/2}r^{1/2}}{(1-\nu^2)^{3/4}}$$

Sfera di raggio r e spessore t premuta dall'esterno

$$p_{cr} = \frac{2Et^2}{r^2\sqrt{3(1-\nu^2)}}$$