## 6.2 Metodi per lo studio della stabilità

Sono a disposizione due metodi:

- metodo statico
- metodo energetico.

### 6.2.1 Metodo statico

1. Si sposta di pochissimo il corpo dalla condizione di equilibrio, purché la nuova configurazione sia compatibile con i vincoli.
2. Si impone che la nuova configurazione sia di equilibrio. Ciò equivale a dire che la configurazione di partenza era di equilibrio indifferente. L'equilibrio indifferente è il caso limite tra equilibrio stabile e instabile, per cui la forza esterna che rende indifferente l'equilibrio è quella critica. Valori inferiori della forza conducono infatti all'equilibrio stabile, mentre valori superiori portano all'equilibrio instabile.
3. Si scrive il bilancio delle forze e dei momenti. Ciò conduce in genere a scrivere un'equazione differenziale.

4. Si risolve la medesima e ci si accorge che le condizioni al contorno sono soddisfatte per un ben determinato valore della forza esterna; Questo fa sì che il corpo risulti in equilibrio indifferente, per cui costituisce il carico critico.

Per esempio, si consideri una trave di lunghezza $l$, incastrata al piede e libera alla sommità, dove è caricata con una forza di compressione $F$ (fig. 25). Si dia alla trave una configurazione deformata spostando lateralmente l'estremo libero.

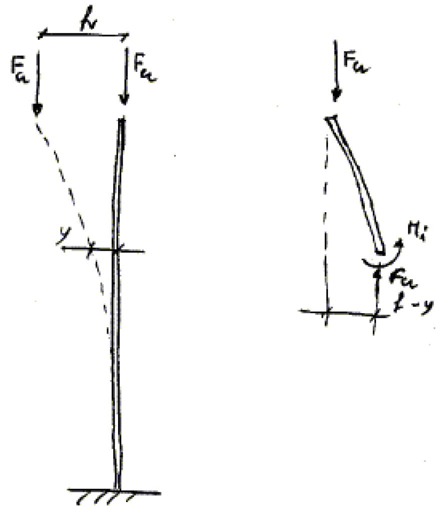

Figura 25: Pilastro soggetta a carico di punta (Column-Beam)

Si supponga che la nuova configurazione sia di equilibrio. Ciò equivale a postulare che la configurazione iniziale fosse di equilibrio indifferente e quindi che la forza $F$ sia proprio quella critica $F_{cr}$.

Per ogni sezione della trave il momento delle forze interne deve uguagliare il momento delle forze esterne.

Il momento $M_e$ delle forze esterne è

$$M_e = F_{cr}(f - y(x))$$

dove $f$ è la freccia in sommità e $y$ è la freccia nella sezione $x$ ($x = 0$ al piede ed $x = l$ in sommità) .

Il momento $M_i$ delle forze interne si può dedurre dalla curvatura $y''$ con l'espressione

$$M_i = E\ I\ y''.$$

Eguagliando si ha

$$F_{cr}(f - y) = E\ I\ y''$$

ossia

$$E\ I\ y'' + F_{cr}y = F_{cr}f$$

che si scrive

$$y'' + \frac{F_{cr}}{E\ I}y = \frac{F_{cr}}{E\ I}f$$

e, ponendo

$$\alpha^2 = \frac{F_{cr}}{E\ I},$$

si ha

$$y'' + \alpha^2 y = \alpha^2 f.$$

Tale equazione differenziale ha per soluzione la somma di un integrale particolare della completa, p.e. $Y = f$ e dell'integrale generale dell'omogenea associata che è

$$y_0 = C_1 \sin\alpha\ x + C_2 \cos\alpha\ x.$$

Perciò

$$y = C_1 \sin\alpha\ x + C_2 \cos\alpha\ x + f.$$

Per le condizioni al contorno deve essere $y = 0$ e $y' = 0$ per $x = 0$ e $y = f$ e $y'' = 0$ per $x = l$.

Dalle prime due, relative all'estremo incastrato, si deduce che $C_1 = 0$ e $C_2 = -f$. Dall'altra si ottiene

$$\cos\alpha l = 0$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2l}$$

per cui

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}.$$

Questa espressione è detta carico critico euleriano (per la trave considerata).

### 6.2.2 Metodo energetico

Quando il corpo si sposta dalla condizione di equilibrio si verifica una variazione, che di solito è un aumento, dell'energia di deformazione elastica e una variazione, che di solito è una diminuzione, dell'energia potenziale di posizione delle forze esterne.

L'equilibrio risulta stabile, instabile o indifferente secondo che l'energia totale è aumentata, diminuita o invariata.

Infatti se il sistema corpo deformato + forze esterne viene spostato di poco dalla configurazione di equilibrio (per esempio per l'urto accidentale di un corpo esterno) e nella nuova configurazione possiede un'energia maggiore, tende a liberarsi di questa energia tornando alla posizione iniziale, per cui in essa l'equilibrio è stabile; se invece possiede nella nuova configurazione un'energia minore tende ad allontanarsi ancora di più dalla configurazione di equilibrio per cui questa risulta instabile.

Per bassi valori delle forze esterne, la diminuzione della loro energia di posizione non basta a compensare l'aumento di energia interna, dovuta alla deformazione imposta, per cui l'equilibrio risulta stabile; Per alti valori delle forze esterne la diminuzione della loro energia potenziale è più che sufficiente a compensare l'aumento dell'energia di deformazione, per cui l'energia totale del sistema diminuisce e quindi vi è un "surplus di energia liberata che può servire a deformare ulteriormente il corpo, allontanandolo così dall'equilibrio, che perciò risulta instabile.

Il caso dell'equilibrio indifferente è quello che costituisce il confine tra i due casi, per cui la forza esterna corrispondente è proprio quella critica.

Riprendendo l'esempio della trave a mensola soggetta a carico di punta, si ha che l'energia elastica $dU$ immagazzinata in un concio di lunghezza $dx$, uguale al lavoro delle forze interne, vale

$$dU = \frac{1}{2} M \frac{M}{E\ I} dx,$$

quindi, per l'intera trave,

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{E\ I}dx.$$

Questo integrale può essere riscritto in due modi. Ricordando che

$$\frac{M}{EI} = y''$$

esso vale

$$U = \frac{1}{2}EI\int_0^l (y'')^2 dx \qquad (1)$$

mentre, scrivendo

$$M = F(f - y)$$

vale

$$U = \frac{1}{2}\frac{F^2}{EI}\int_0^l (f - y)^2 dx. \qquad (2)$$

Il lavoro della forza esterna $F$ è dato dal prodotto della forza per dallo spostamento del suo punto di applicazione nella direzione della forza. Lo spostamento detto è dovuto alla rotazione del concio, che rimane non più verticale pur rimanendo della stessa lunghezza (essa è minore della lunghezza a riposo dell'aliquota dovuta alla compressione, che è identica sia che la trave rimanga verticale sia che si deformi). Per un concio $dx$ (fig. 26), inclinato di $\theta$ rispetto alla condizione indeformata (verticale), la variazione di altezza vale

$$d\delta = (1 - \cos\theta)dx = \frac{\theta^2}{2}dx = \frac{(y')^2}{2}dx$$

e, per tutta la trave

$$\delta = \int_0^l \frac{(y')^2}{2}dx.$$

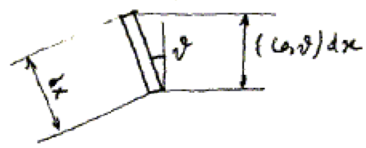


Figura 26: Rotazione di un concio nel pilastro soggetto a carico di punta

Il lavoro della forza esterna è perciò

$$W = F\int_0^l \frac{(y')^2}{2}dx.$$

Se i due lavori sono uguali significa che siamo in condizioni di equilibrio indifferente e quindi la forza esterna è quella critica.

Perciò, se l'energia interna è scritta nella forma (1) si ha

$$F_{cr} = \frac{EI\int_0^l (y'')^2 dx}{\int_0^l (y')^2 dx} \tag{3}$$

ovvero, se l'energia interna è scritta nella forma (2)

$$F_{cr} = EI\frac{\int_0^l (y')^2 dx}{\int_0^l (f-y)^2 dx} \tag{4}$$

Queste formule sono esatte solo se la $y(x)$ è la deformata effettiva. Tuttavia si dimostra che il funzionale $F_{cr}$ è minimo quando la $y(x)$ è quella effettiva; per cui se si da ad $y(x)$ una forma simile a quella effettiva si ottiene una $F_{cr}$ senz'altro maggiore di quella vera ma non molto discosta da essa.

L'esperienza dimostra che in questo caso la (4) è più accurata della (3).

Per esempio, la trave-colonna incastrata alla base e libera in sommità, già vista nell'applicazione del metodo statico, ha una deformata sinusoidale ossia

$$y = f(1-\cos\frac{\pi x}{2l})$$

Sostituendo questa espressione nelle (3) e (4) si ottiene in entrambi i casi

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$$

che è ovviamente lo stesso risultato ottenuto col metodo statico. Se invece si ipotizza una deformata parabolica $y = cx^2$, che all'estremo libero diventa $f = cl^2$ da cui si ricava $c$, per cui in definitiva

$$y = \frac{f}{l^2}x^2$$

si ottiene, sostituendo nella (3)

$$F_{cr} = 3\frac{EI}{l^2}$$

con un errore del 21.6 per cento e, sostituendo nella (4)

$$F_{cr} = 2.5\frac{EI}{l^2}$$

con un errore di 1.32 per cento.

Se si ipotizza una deformata di terzo grado

$$y = \frac{f}{2l^3}(3lx^2 - x^3)$$

e si sostituisce nella (3) si ha

$$F_{cr} = 2.5\frac{EI}{l^2}$$

con un errore di 1.32 per cento. Per i tre casi precedenti si veda Belluzzi, vol 4 pag 36-37, mentre il caso della deformata cubica sostituita nella (4) viene lasciata allo studioso lettore .