

## 4.6 ANALISI DINAMICA

Per scrivere l'equazione fondamentale del metodo degli elementi finiti nel caso dinamico (ossia con forze esterne variabili nel tempo), applicheremo il principio di d'Alembert, che impone di sommare alle forze agenti le forze d'inerzia. Calcoliamo preliminarmente la forza d'inerzia di un elementino di densità  $\rho$  e volume  $dV$ . Se  $s(t)$  è lo spostamento di tale elementino, la forza d'inerzia è

$$dI = -\rho \ddot{s} dV$$

Se per lo spostamento si adotta la stessa espressione usata nel caso statico

$$s(t) = \mathbf{N}(x, y, z) \mathbf{q}(t)$$

risulta

$$dI = -\rho \mathbf{N} \ddot{\mathbf{q}} dV.$$

Integrando su tutta la struttura (quindi su tutto il volume  $V$ ), si ha

$$I = - \int_V \rho \mathbf{N} dV \ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}$$

con opportuno significato della matrice  $\mathbf{M}$ . tale termine va aggiunto al secondo membro dell'equazione generale (4) degli Elementi Finiti, che quindi risulta:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{f}(t) \quad (6)$$

Alla stessa equazione si arriva sfruttando le equazioni di Lagrange, con opportune ipotesi sulla natura delle forze agenti. Nella (6) viene talvolta fatto comparire un termine riguardante lo smorzamento, ma esso non è eccessivamente importante per le applicazioni e verrà quindi trascurato. Va detto infine che la matrice  $\mathbf{M}$  così ottenuta prende il nome di *matrice compatibile delle masse*, e risulta una matrice a banda, con larghezza di banda molto piccola, mentre in altri casi si utilizza una *matrice concentrata delle masse*, che risulta addirittura diagonale.

Una volta trovata l'equazione generale (6) per la dinamica dei sistemi schematizzati col metodo degli elementi finiti, occorre passare alla risoluzione. La grande varietà del vettore delle forze esterne, in cui evidentemente tutti gli elementi sono funzioni del tempo, impone però dei trattamenti standardizzati e molto schematici. Tra essi prevale per importanza quello dell'*analisi modale*.

Questo consiste innanzitutto nel trascurare lo smorzamento, e quindi nel cercare la soluzione dell'equazione omogenea associata alla (6)

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (6')$$

in modo che sia

$$\mathbf{q} = \mathbf{x} \sin \omega t$$

Derivando e sostituendo nella (6') si ha

$$[-\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{K}] \sin \omega t = \mathbf{0}$$

e quindi

$$-\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{K} = \mathbf{0}$$

che va sotto il nome di *problema generalizzato degli autovettori*, che si risolve con tecniche standard. Questo problema fornisce tanti autovalori  $\omega^2$  e tanti autovettori  $\mathbf{x}$  quanti sono i gradi di libertà del sistema, ma, e questo è il bello, se ne prendono in considerazione solo pochissimi, cioè i primi tre, o, per dire, i primi

venti, e gli altri non si calcolano neppure . Gli autovalori più alti infatti hanno una importanza via via più piccola in quanto eccitano solo una parte via via più piccola della struttura, stante il moltiplicarsi di *punti nodali*, in numero pari all'ordine dell'autovettore, in cui la materia è ferma.

Riassumendo: gli autovettori sono le ampiezze delle soluzioni non banali della (6') e si possono ottenere solo se la soluzione è sinusoidale nel tempo e con pulsazione apposita (il corrispondente autovalore). Per ottenere correttamente la soluzione del problema degli autovalori occorre eliminare i gradi di libertà di corpo rigido, che introdurrebbero degli autovalori spuri  $\omega^2 = 0$ . Inoltre, gli autovalori sono determinati a meno di una costante arbitraria, cosa che permette di *normalizzarli* in modo opportuno.

Gli autovettori possono essere utilizzati per disaccoppiare le equazioni del moto attraverso un opportuno cambiamento di variabili (le  $\mathbf{q}$  sono coordinate lagrangiane e quindi possono essere cambiate ogni volta che fa comodo, purché la corrispondenza tra vecchie e nuove coordinate sia biunivoca).

In questo caso si pone

$$\mathbf{q} = \mathbf{X}\mathbf{p} \tag{7}$$

in cui la matrice  $\mathbf{X}$  è formata giustapponendo tutti e soli gli autovettori (che sono ovviamente dei vettori colonna) che sono stati presi in considerazione. Si tratta evidentemente di una matrice 'alta' e 'stretta', visto che ha tante righe quanto il numero di gradi di libertà del sistema originario, e solo pochissime colonne (tre è il minimo di legge per l'analisi sismica). Le coordinate  $\mathbf{p}$  si chiamano *coordinate principali*.

Sostituendo la (7) nella (6) e manipolando (parecchio) il risultato ottenuto si ha:

$$\ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{L}\mathbf{p} = \mathbf{U}\mathbf{f} \tag{8}$$

in cui  $\mathbf{L}$  è la matrice diagonale degli autovettori  $\omega_i^2$ ; il fatto che questa matrice sia diagonale assicura che il sistema (8), che ha ormai 'poche' (tre è il minimo) equazioni in altrettante incognite, è disaccoppiato (ossia, in ogni equazione compare una sola incognita).

Per quanto riguarda il secondo membro della (8), tutto naturalmente dipende dalla forma delle funzione  $f_i(t)$ . Se si deve effettuare un'analisi sismica, esse hanno tre caratteristiche: sono di durata limitata, sono molto ricche di armoniche e sono inoltre proporzionali alla massa, in quanto forze d'inerzia.

Si suole quindi scrivere il secondo membro come

$$-\mathbf{g}\ddot{\mathbf{u}}_g(t)$$

in cui, a conti fatti

$$g_i = \frac{\sum_{k=1}^n m_k p_k^{(i)}}{\sum_{k=1}^n m_k \left( p_k^{(i)} \right)^2}$$

essendo  $p_k^{(i)}$  gli elementi dell'autovettore  $i$ -esimo e  $m_k$  delle opportune masse associate a ciascun grado di libertà e che possono essere identificate con gli elementi della diagonale principale della matrice concentrata delle masse o ricavate facilmente dagli elementi non nulli della matrice compatibile delle masse.

Rimangono da trovare gli **effetti dell'eccitazione dei vari modi di vibrare sulle coordinate  $q_i$** . A tale scopo si immagina di eseguire l'integrazione di ciascuna delle equazioni disaccoppiate, trovando un valore massimo per ciascuna delle  $p_i$  e delle sue derivate:

$$(\dot{p}_i)_{max} = g_i (S_a)_i$$

$$(\dot{p}_i)_{max} = g_i (S_v)_i$$

$$(p_i)_{max} = g_i (S_d)_i$$

essendo  $(S_d)_i$ ,  $(S_v)_i$  e  $(S_a)_i$  delle opportune funzioni della eccitazione. In pratica la normativa fornisce  $(S_a)_i$  in funzione della pulsazione  $\omega_i$  del modo  $i$ -esimo, mentre le altre due si ottengono dividendo la prima rispettivamente per  $\omega_i$  e  $\omega_i^2$ .

Per quanto riguarda il comportamento del vettore  $\mathbf{q}$  per effetto del modo di vibrare  $i$ -esimo, di esso importa soprattutto il massimo valore che assume ognuna delle sue componenti e le rispettive derivate. Si ha quindi

$$\left( \dot{q}_k^{(i)} \right)_{max} = \mathbf{x}^{(i)} (\dot{p}_i)_{max} = \mathbf{x}^{(i)} g_i (S_a)_i$$

$$\begin{aligned} \left( \dot{q}_k^{(i)} \right)_{max} &= \mathbf{x}^{(i)} (\dot{p}_i)_{max} = \mathbf{x}^{(i)} g_i (S_v)_i \\ \left( q_k^{(i)} \right)_{max} &= \mathbf{x}^{(i)} (p_i)_{max} = \mathbf{x}^{(i)} g_i (S_d)_i \end{aligned}$$

In un buon codice ad elementi finiti, tuttavia, non è ancora questa la fine del gioco, occorre infatti calcolare le caratteristiche di sollecitazione (per esempio i momenti) e addirittura le tensioni e deformazioni in ogni punto.

A tale scopo occorrerebbe combinare i modi eccitati nella peggior maniera possibile. per brevità il trattamento standard di questi dati avviene però in maniera diversa, ipotizzando che i modi eccitino la struttura in maniera statisticamente indipendente (p.e. che durante il massimo indotto da un modo su una delle caratteristiche della sollecitazione tutti gli altri modi siano 'abbastanza' lontani dal massimo). Questa ipotesi conduce immediatamente alla formula

$$\sigma(P) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\sigma^{(i)}(P))^2}$$

in cui si è preso come esempio di calcolo il valore di una  $\sigma$  (non importa specificare quale) in un punto  $P$  (ma lo stesso vale per le deformazioni, per i momenti eccetera). I valori  $\sigma^{(i)}(P)$  sono quelli che la componente in studio della tensione assume in quel punto  $P$  per effetto del modo  $i$ -esimo.