## 4.5 Complementi e complicazioni

1. L'espressione

$$\mathbf{K}^{(\mathbf{e})} = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV, \tag{5}$$

dove l'integrale è esteso al solo volume dell'elemento $e$, è detta matrice di rigidezza dell'elemento $e$. In questo modo la (3) si scrive

$$\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{K}^{(\mathbf{e})} \tag{3'}$$

e questa espressione è quella comunemente usata, sempre per ragioni di occupazione di memoria.

La matrice $\mathbf{K}^{(\mathbf{e})}$ viene di solito scritta eliminando tutte le righe e le colonne che si riferiscono a gradi di libertà estranei all'elemento considerato. Le matrici così scritte non possono essere direttamente sommate tra loro (ovviamente al momento di fare la somma le righe e le colonne provvisoriamente cancellate devono essere in qualche modo ripristinate: esistono dei semplici algoritmi che si incaricano della bisogna) ma sono di dimensioni maneggevoli e oltretutto dipendenti non dalla intera struttura ma solo dal tipo di elemento al quale si riferiscono: se ne vedranno degli esempi più sotto.

2. L'ordine in cui sono elencati i gradi di libertà nel vettore $\mathbf{q}$ determina la scrittura di tutte le matrici e può in generale essere qualsiasi, purché fissato una volta per tutte in ogni singolo problema. Per ragioni di spazio di memoria si preferisce procedere così:

a) si numerano i nodi in modo che *la massima differenza (in valore assoluto) tra i nodi di uno stesso elemento sia quanto più piccola possibile.*

b) si ordinano i gradi di libertà prendendo nell'ordine lo spostamento $u$ del primo nodo, lo spostamento $v$ del primo nodo, lo spostamento $w$ del primo nodo, lo spostamento $u$ del secondo nodo e così via fino allo spostamento $w$ dell'ultimo nodo.

In questo modo si ottiene una matrice di rigidezza *a banda*, ossia tale da avere diversi da zero solo gli elementi della diagonale principale e di poche diagonali ad essa adiacenti.

3. *Calcolo completo di una matrice di rigidezza: l'elemento tetraedrico a quattro nodi.* Per il caso di un tetraedro con quattro nodi (il più semplice elemento tridimensionale) la matrice $\mathbf{N}$, riferita agli spostamenti dei soli nodi dell'elemento, si scrive:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} N_i & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & N_k & 0 & 0 & N_l & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & N_k & 0 & 0 & N_l & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & N_k & 0 & 0 & N_l \end{pmatrix}$$

dove le $N_i, N_j$ ecc. sono funzioni interpolanti lineari; in particolare la $N_i$ vale 0 sulla faccia $jkl$ e vale 1 nel nodo $i$ ed è proporzionale alla distanza del punto considerato dalla faccia $jkl$. Le funzioni di forma (vedi Rao pag. 123) sono le seguenti:

$$N_i = \frac{1}{6V^{(e)}}(a_i + b_i x + c_i y + d_i z)$$

$$N_j = \frac{1}{6V^{(e)}}(a_j + b_j x + c_j y + d_j z)$$

e le analoghe per $N_k$ ed $N_l$; nelle precedenti espressioni vale:

$$a_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \\ x_l & y_l & z_l \end{vmatrix}$$

$$b_i = \begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_k & z_k \\ 1 & y_l & z_l \end{vmatrix}$$

$$c_i = \begin{vmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_k & 1 & z_k \\ x_l & 1 & z_l \end{vmatrix}$$

$$d_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ x_l & y_l & 1 \end{vmatrix}$$

e le altre costanti si ottengono dalle precedenti permutando circolarmente i pedici $i, j, k, l$. I valori $x_i, y_i, z_i$ sono poi le coordinate del primo vertice del tetraedro e così via. Essendo $\mathbf{B} = \Delta\mathbf{N}$ si ha

$$B_{11} = \frac{\partial}{\partial x} N_i = \frac{b_i}{6V_e}$$

eccetera, per cui

$$\mathbf{B} = \frac{1}{6V_e}\begin{pmatrix} b_i & 0 & 0 & b_j & 0 & 0 & b_k & 0 & 0 & b_l & 0 & 0 \\ 0 & c_i & 0 & 0 & c_j & 0 & 0 & c_k & 0 & 0 & c_l & 0 \\ 0 & 0 & d_i & 0 & 0 & d_j & 0 & 0 & d_k & 0 & 0 & d_l \\ c_i & b_i & 0 & c_j & b_j & 0 & c_k & b_k & 0 & c_l & b_l & 0 \\ 0 & d_i & c_i & 0 & d_j & c_j & 0 & d_k & c_k & 0 & d_l & c_l \\ d_i & 0 & b_i & d_j & 0 & b_j & d_k & 0 & b_k & d_l & 0 & b_l \end{pmatrix}$$

Poiché $\mathbf{B}$ e $\mathbf{D}$ sono indipendenti dalla posizione $x, y, z$, si ha

$$\mathbf{K^{(e)}} = V_e\mathbf{B}^T\mathbf{DB}$$

in cui $V_e$ è il volume dell'elemento.

6. Per elementi tridimensionali non lineari e per elementi bi- e momodimensionali facenti parte di una struttura tridimensionale conviene scrivere le matrici $\mathbf{N}$ e $\mathbf{B}$ in coordinate locali, in modo da semplificare i calcoli, riconducendosi poi a coordinate globali.

7. *L'elemento isoparametrico triangolare a sei nodi di secondo grado in stato piano di tensione o di deformazione.* Gli elementi isoparametrici sono caratterizzati da maggiore flessibilità perché possono avere lati curvi. Le funzioni di forma vengono scritte in funzione di coordinate interne, che in questo caso sono $L_1, L_2, L_3$ (vedi figura) con $L_1 + L_2 + L_3 = 1$. I nodi posti sui lati permettono di ottenere contorni curvi. Risulta

$$\begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = \mathbf{Nq}$$

con

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ . \\ . \\ u_6 \\ v_6 \end{pmatrix}$$

ed

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & ..... & N_6 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & ..... & 0 & n_6 \end{pmatrix}$$

essendo

$$N_i = L_i(2L_i - 1) \qquad i = 1, 2, 3$$

$$N_4 = 4L_1L_2$$

$$N_5 = 4L_2L_3$$

$$N_6 = 4L_3L_1.$$

Eliminando $L_3$ si ha:

$$N_3 = 1 - 3(L_1 + L_2) + 2(L_1 + L_2)^2$$

e gli altri $N_i$ rimangono invariati

Per permettere l'esistenza di lati curvi si pone (condizione di isoparametricità)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{Nx}$$

essendo

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ . \\ . \\ x_6 \\ y_6 \end{pmatrix}$$

ed $\mathbf{N}$ è definito come sopra. Sappiamo che è

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{pmatrix} = \mathbf{Bq}$$

con

$$\mathbf{B} = \mathbf{\Delta N}$$

in cui in questo caso

$$\mathbf{\Delta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}$$

Risulta quindi

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & .... & \frac{\partial N_6}{\partial x} & 0 & 0 & .... & 0 \\ 0 & 0 & .... & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & .... & \frac{\partial N_6}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & .... & \frac{\partial N_6}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & .... & \frac{\partial N_6}{\partial x} \end{pmatrix}$$

in cui le funzioni di forma $N_i$ sono espresse in funzione delle coordinate naturali $L_1$ ed $L_2$.

Per valutare $\mathbf{K}$ e il vettore delle forze esterne sono necessarie due trasformazioni. Innanzitutto la matrice $\mathbf{K}$ deve essere espressa in termini di derivate delle funzioni di forma rispetto alle variabili naturali e non rispetto alle $x$ ed $y$. Successivamente gli integrali di superficie e di volume devono essere espressi in termini delle coordinate naturali con un opportuno cambio degli estremi di integrazione.

Per la prima trasformazione si fa uso della matrice jacobiana

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial L_1} & \frac{\partial y}{\partial L_1} \\ \frac{\partial x}{\partial L_2} & \frac{\partial y}{\partial L_2} \end{pmatrix}$$

che vale (vedi Rao p. 235)

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial N_i}{\partial L_1} x_i & \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial N_i}{\partial L_1} y_i \\ \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial N_i}{\partial L_1} x_i & \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial N_i}{\partial L_2} y_i \end{pmatrix}$$

cosicché

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{pmatrix} = \mathbf{J^{-1}} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \end{pmatrix}.$$