4.3 Lineamenti generali

Il metodo degli elementi finiti può essere quindi così schematizzato:

1. Si suddivide la struttura in *elementi* di forma opportuna, collegati tra loro in punti detti nodi; gli elementi possono avere la stessa dimensionalità della struttura o anche una dimensionalità inferiore, per esempio si possono usare elementi monodimensionali per costruire una struttura tridimensionale; però questo caso sarà visto più oltre, per cui per il momento si considereranno solo strutture tridimensionali composti da elementi anch'essi tridimensionali.

2. Si adotta un opportuno *modello di spostamento*, cioè si ipotizza che lo spostamento $\mathbf{s}(P)$ in ogni punto P di un elemento sia funzione lineare dei soli spostamenti dei nodi appartenenti all'elemento e che quindi non dipenda nè dagli spostamenti di nodi non appartenenti all'elemento nè dagli spostamenti di altri punti. Lo spostamento $\mathbf{s}(P)$ comunque dipende anche dalle *coordinate* dei nodi dell'elemento, e questa dipendenza può essere non lineare. Lo spostamento, come si è detto, è una funzione vettoriale $\mathbf{s}(x, y, z)$ (equivalente a tre funzioni scalari u, v, w). Nel caso tridimensionale si pone

$$\mathbf{s}(x,y,z) = \begin{pmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{pmatrix} = \mathbf{N}(x,y,z)\mathbf{q}$$

   in cui la matrice $\mathbf{N}$ è una matrice di *funzioni di forma* e $\mathbf{q}$ è il vettore degli spostamenti nodali, ossia

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

   Il numero n è il numero di nodi dell'intera struttura; il vettore $\mathbf{q}$ ha una dimensione molto grande (n può facilmente superare 2000 per cui la dimensione di $\mathbf{q}$ supera 6000) e quasi tutti gli elementi della matrice $\mathbf{N}$ (cioè quelli che sono in colonne relative a nodi 'estranei') sono nulli. Impostando così il problema non si ha alcuna difficoltà nè concettuale nè di spazio di memoria, perché ovviamente vengono immagazzinati in memoria solo gli elementi diversi da zero, con i loro indici. Spesso, tuttavia, il vettore $\mathbf{q}$ e le matrici $\mathbf{N}$ e $\mathbf{B}$ vengono riferite ai soli gradi di libertà dell'elemento: si tratta di una proiezione su un sottospazio, analogo al caso in cui una figura piana viene studiata in due dimensioni invece che in tre. Ciò semplifica la scrittura su carta delle equazioni ed in parte anche la programmazione ma presenta per il principiante qualche complicazione, per esempio quando si scrive l'equazione (3).

   Per il calcolo delle funzioni di forma si veda appresso.

3. Si scrivono per ciascun elemento le espressioni delle deformazioni e delle tensioni in funzione degli spostamenti. Posto

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

si ha:

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \Delta \mathbf{s}$$

in cui è implicitamente definita la matrice Δ per cui

$$\epsilon = \Delta \mathbf{N} \mathbf{q} = \mathbf{B} \mathbf{q} \tag{1}$$

Le componenti di $\mathbf{B} = \Delta \mathbf{N}$ sono le derivate parziali delle funzioni di forma. Per la legge di Hooke

$$\sigma = \mathbf{D} \epsilon$$

in cui $\mathbf{D}$ contiene le costanti elastiche del materiale , quindi

$$\sigma = \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{q}. \tag{2}$$

Le espressioni (1) e (2), anche se formalmente sono scritte per tutto il dominio della struttura in studio (anzi addirittura per tutto lo spazio) sono valide solo nell'ambito dell'elemento considerato perché solo lì le funzioni di forma danno un'approssimazione sufficiente.

4. Si scrive l'espressione dell'energia W di deformazione elastica, che è uguale al lavoro delle forze esterne nodali $\mathbf{f}$

$$W = \frac{1}{2} \sum_e \int_{V_e} \epsilon^T \sigma \, dV = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{f}$$

(dove la sommatoria è estesa a tutti gli elementi e l'integrale è fatto all'interno di ciascun elemento, per l'avvertenza data alla fine del numero precedente) da cui

$$\sum_e \int_{V_e} \mathbf{q}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{q} \, dV = \mathbf{q}^T \mathbf{f}$$

5. Al primo membro i vettori $\mathbf{q}^T$ e $\mathbf{q}$ si possono portare fuori sia del segno di integrale che del segno di sommatoria, per cui

$$\mathbf{q}^T \left(\sum_e \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, dV \right) \mathbf{q} = \mathbf{q}^T \mathbf{f}$$

che, con la posizione,

$$\mathbf{K} = \sum_e \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, dV, \tag{3}$$

e con ovvia semplificazione restituisce l'equazione fondamentale del metodo degli elementi finiti

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{f} \tag{4}$$

in cui il vettore $\mathbf{q}$ degli spostamenti nodali è incognito e il vettore $\mathbf{f}$ delle forze nodali è noto. La matrice $\mathbf{K}$ che compare nella (2) è detta *matrice di rigidezza* ed ha una notevolissima interpretazione: se tutti i gradi di libertà vengono bloccati tranne quello i-esimo e a quest'unico si impone uno spostamento unitario, la reazione del vincolo j-esimo è proprio K_{ij} (a parte il segno).

6. Si impongono gli opportuni vincoli *cancellando* quelle righe e quelle colonne della matrice $\mathbf{K}$ e quegli elementi dei vettori $\mathbf{f}$ e $\mathbf{q}$ che corrispondono a gradi di libertà soppressi.

7. Si risolve la (2) con i consueti metodi dell'algebra lineare.