

3.5 SOLIDO DEL DE SAINT VENANT

Problema di de Saint Venant *Determinare lo stato di equilibrio di un solido cilindrico o prismatico sollecitato solo sulle due basi.* Tale solido è detto solido di de Saint Venant. De Saint Venant risolse questo problema con l'ausilio del seguente

Postulato di de Saint Venant In un solido di de Saint Venant le tensioni e le deformazioni non variano, se non in una zona adiacente alle due basi, se si sostituisce la sollecitazione agente su di esse con un'altra avente la stessa risultante e lo stesso momento risultante.

Più tardi i risultati vennero estesi a solidi caricati anche sulla superficie laterale, o con asse non rettilineo, o con sezione variabile con gradualità.

Riassumo qui alcune formule che si suppongono note dalla Scienza delle Costruzioni.

SFORZO NORMALE

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

FLESSIONE RETTA

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y \quad \sigma_{max} = \frac{M_x}{W_{fx}}$$

I_x è il momento quadratico di area, popolarmente detto *momento d'inerzia*, della sezione rispetto all'asse baricentrico x ed è definito

$$I_x = \int_A y^2 dA$$

Il *modulo di resistenza a flessione* W_{fx} è definito $W_{fx} = I_x / y_{max}$.

Raggio di curvatura di una trave inflessa:

$$R = \frac{y}{\epsilon} = \frac{EI_x}{M}$$

Linea elastica:

$$y'' = \frac{M}{EI_x}$$

Proprietà delle sezioni più comuni:

Cerchio (rispetto ad un diametro):

$$I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64} \quad W_{fx} = W_{fy} = \frac{\pi D^3}{32}$$

Corona circolare (rispetto ad un diametro):

$$I_x = I_y = \frac{\pi(D_e^4 - D_i^4)}{64} \quad W_{fx} = W_{fy} = \frac{\pi(D_e^4 - D_i^4)}{32D_e}$$

Corona circolare sottile di spessore s (rispetto ad un diametro):

$$I_x = I_y = \frac{\pi D^3}{8} s \quad W_{fx} = W_{fy} = \frac{\pi D^2}{4} s$$

Rettangolo (rispetto ad un asse baricentrico x parallelo al lato b e perpendicolare al lato h):

$$I_x = \frac{b h^3}{12} \quad W_{fx} = \frac{b h^2}{6}$$

FLESSIONE DEVIATA E FLESSIONE COMPOSTA

Per i materiali con comportamento simmetrico a trazione e a compressione (ossia per tutti i metalli eccetto la ghisa) si applica il principio di sovrapposizione degli effetti

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x$$

TAGLIO

$$\tau = \frac{T S}{b I}$$

dove S è il momento statico di una delle parti della sezione
casi particolari:

sezione rettangolare

$$\tau_{max} = \frac{3 T}{2 b h}$$

sezione circolare

$$\tau_{max} = \frac{4 T}{3 A}$$

TORSIONE

1) sezione circolare o a corona circolare

$$\tau_{max} = \frac{M_t D_e}{I_p} \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{M_t l}{G I_p}$$

I_p è il momento polare di area, popolarmente detto *momento d'inerzia polare* che vale

$$I_p = \frac{\pi (D_e^4 - D_i^4)}{32}$$

2) sezione rettangolare

La massima tensione tangenziale si ha nel punto medio dei lati più lunghi della sezione e vale

Tabella 4: Coefficienti per il calcolo della torsione in travi rettangolari

b/c	1.00	1.50	1.75	2.00	2.50	3	4	6	8	10	∞
α	0.208	0.231	0.239	0.246	0.258	0.267	0.282	0.299	0.307	0.313	0.333
β	0.141	0.196	0.214	0.229	0.249	0.263	0.281	0.299	0.307	0.313	0.333

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{\alpha b c^2}$$

dove b è il lato più lungo e c è il lato più corto della sezione e α è data dalla tabella I. L'angolo totale di torsione in radianti è

$$\theta = \frac{M_t L}{\beta b c^3 G}$$

dove L è la lunghezza del tratto soggetto al momento M_t e β è data dalla tabella 4.

CASI COMPOSTI

Si applica il principio di sovrapposizione degli effetti.

Le σ da sf. normale e da mom. flett. si sommano algebricamente, mentre le τ da taglio e torsione si sommano vettorialmente, visto che in generale hanno direzioni diverse. Dette σ e τ le quantità così ottenute e visto che il solido di de Saint Venant è in stato piano di tensione, si ha:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

3.5.1 DEFORMAZIONI LATERALI DI TRAVI INFLESSE

Si ottengono tramite doppia integrazione del diagramma del momento flettente; infatti l'equazione che connette il momento flettente alla curvatura è:

$$y'' = \frac{M}{EI}.$$

L'integrazione può avvenire per via analitica o numerica o per via grafica (col metodo del poligono funicolare); quest'ultima è ovviamente meno precisa, ma dà un'idea rapida dell'andamento della deformata e perciò può essere adottata o come primo tentativo, per una conoscenza preliminare della linea elastica o per la successiva applicazione del metodo di Mohr.

Quest'ultimo, detto anche metodo dell'area dei momenti, parte dalla constatazione che l'angolo tra le tangenti alla linea elastica nei punti A e B è dato dall'integrale

$$d\phi = \int_A^B \frac{M}{EI} dx.$$

Si dimostra che la distanza δ (misurata normalmente alla trave) tra la deformata in un punto P e la tangente alla deformata in un altro punto T è data dal momento statico dell'area del diagramma dei momenti tra il punto di tangenza T e il punto in studio P

$$\delta = \int_T^P \frac{M}{EI} x dx.$$

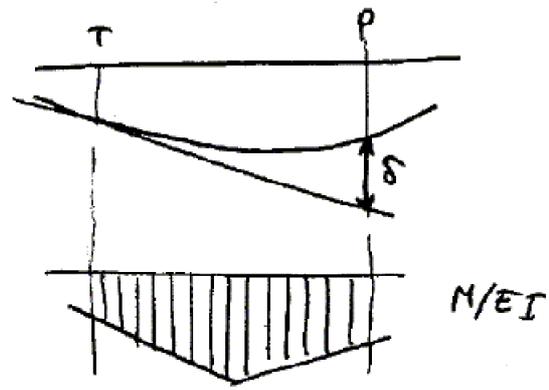


Figura 14: Deformazione laterale di travi inflesse