

3.3 TERMODINAMICA DELLA DEFORMAZIONE

L'aumento dell'energia interna di un sistema è dato dalla differenza tra il calore ricevuto dal sistema e il lavoro compiuto dal sistema. Nel nostro caso il sistema è un cubetto prelevato dal corpo in tensione. Su una coppia di facce opposte agiscono dall'esterno le forze $\sigma_{ij}dA$, quindi il sistema reagisce sull'ambiente con le forze $-\sigma_{ij}dA$. Queste compiono lavoro per effetto dello spostamento $d\epsilon_{ij}dL$ dove dL è la dimensione del cubetto normale alla faccia di area dA . Il lavoro totale è dato dalla somma dei lavori compiuti dalle forze agenti su tutte le coppie di facce, che si può esprimere con $-\sigma_{ij}d\epsilon_{ij}dLdA = -\sigma_{ij}d\epsilon_{ij}dV$ dove V è il volume del cubetto. Il lavoro per unità di volume è quindi

$$dR = -\sigma_{ij}d\epsilon_{ij}$$

Nella meccanica dei solidi è usuale riferire le grandezze termodinamiche all'unità di volume invece che all'unità di massa, per cui la variazione di energia interna si scrive

$$dU = TdS + \sigma_{ij}d\epsilon_{ij}$$

in cui le maiuscole indicano appunto grandezze riferite all'unità di volume.

Introducendo l'energia libera di Helmholtz $F = U - TS$ si ha

$$dF = -SdT + \sigma_{ij}d\epsilon_{ij},$$

per cui si può scrivere

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ij}} \right)_S = \left(\frac{\partial F}{\partial \epsilon_{ij}} \right)_T$$

L'espressione dell'energia libera in funzione del tensore di deformazione si trova facilmente per piccoli valori della deformazione, perché basta allora uno sviluppo in serie limitata ai termini di grado più basso. Ci si limita qui al caso dei corpi isotropi.

Dato un corpo ad una certa temperatura, si considera non deformato lo stesso corpo in assenza di forze esterne per la stessa temperatura, per escludere dal conto quelle deformazioni (dilatazioni termiche) che non sono dovute a tensioni. Ora, per $\epsilon_{ij} = 0$ si ha per definizione $\sigma_{ij} = 0$, quindi nella espressione di F non compaiono termini lineari in $\epsilon_{ij} = 0$. Quindi nella espressione di F compaiono solo termini quadratici.

Dato che l'energia libera F è uno scalare, ogni termine dello sviluppo sarà uno scalare. Con un tensore simmetrico u_{ij} si possono costruire due scalari indipendenti di secondo grado; si possono assumere come tali u_{ii}^2 , il quadrato della somma delle componenti diagonali, e u_{ik}^2 , la somma dei quadrati delle componenti.

Landau - Lifšits, Vol VII pag. 20

Nel nostro caso, ricordando l'espressione della legge dell'elasticità in funzione delle parti sferiche e deviatoriche dei tensori, non può essere che

$$F = F_0 + \frac{\lambda}{2}\epsilon_{ii}^2 + \mu\epsilon_{ij}^2$$

in cui compaiono le costanti di Lamé. Scrivendo il differenziale totale si ha

$$\begin{aligned} dF &= dF_0 + \lambda\epsilon_{ii}d\epsilon_{ii} + 2\mu\epsilon_{ij}d\epsilon_{ij} = \\ &= \left(\lambda\epsilon_{ii}\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij} \right) d\epsilon_{ij} \end{aligned}$$

da cui, poiché dF_0 dipende anche dalla temperatura,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \epsilon_{ij}} \right)_T = \lambda\epsilon_{ii}\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij}.$$

In questo modo si sono riottenute le equazioni di Navier.