3.2 Legame tensione-deformazione

Ci si limita al campo elastico per materiali omogenei e isotropi.

Nel caso più semplice di solido prismatico di materiale omogeneo e isotropo soggetto a sforzo assiale si constata che si ha allungamento lungo l'asse e contrazione nelle dimensioni perpendicolari all'asse. Inoltre l'allungamento e l'accorciamento sono proporzionali alla tensione e le costanti di proporzionalità sono caratteristiche del materiale. Questa relazione di proporzionalità venne scoperta per la prima volta da Hooke (1676) nelle sue ricerche sulle molle da orologio.

In formula, se z è la direzione della forza, si ha

$$\epsilon_z = \frac{1}{E}\sigma_z$$

$$\epsilon_x = \epsilon_y = -\frac{\nu}{E}\sigma_z.$$

E è detto modulo di elasticità longitudinale o semplicemente modulo di elasticità o anche modulo di Young; ν è detto modulo di Poisson o coefficiente di contrazione laterale.

Equazioni di Navier

Se agiscono contemporaneamente tensioni lungo i tre assi, per il principio di sovrapposizione degli effetti si ha:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z))$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z))$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_x + \sigma_y))$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz}$$

in cui

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

è detta modulo elastico trasversale o prima costante di Lamé (in questo caso spesso indicata con μ).

Equazioni inverse di Navier

Le ultime tre si invertono in modo ovvio.

Le prime tre, invece, sommate danno

$$E(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) = (1-2\nu)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \tag{1}$$

La prima eq. di Navier si riscrive, aggiungendo e sottraendo $\nu\sigma_x$,

$$E\epsilon_x = (1-\nu)\sigma_x - \nu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = (1+\nu)\sigma_x - \frac{\nu E}{1-2\nu}(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)$$

da cui

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu}\left(\epsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu}(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)\right)$$

che si scrive

$$\sigma_x = 2G\big(\epsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu}e\big)$$

essendo

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

La forma più comune in cui vengono scritte le equazioni inverse di Navier è la seguente:

$$\sigma_x = 2\mu\epsilon_x + \lambda e$$

$$\sigma_y = 2\mu\epsilon_y + \lambda e$$

$$\sigma_z = 2\mu\epsilon_z + \lambda e$$

$$\tau_{xy} = \mu\gamma_{xy}$$

$$\tau_{xz} = \mu\gamma_{xz}$$

$$\tau_{yz} = \mu\gamma_{yz}$$

in cui μ, prima costante di Lamé, non è altro che il modulo elastico trasversale G e λ, seconda costante di Lamé, è data da

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu).}$$

Equazioni di Navier in notazione di Einstein

È opportuno a questo punto porre le equazioni di Navier in una forma più sintetica, utilizzando la notazione di Einstein per i tensori, che sarà utilizzata anche nelle sezioni successive, dedicate ai deviatori degli sforzi e delle deformazioni e alla termodinamica della deformazione.

1) gli indici x,y,z sono sostituiti da 1,2,3 rispettivamente

2) viene posto $\sigma_x = \sigma_{11}$; $\sigma_y = \sigma_{22}$; $\sigma_z = \sigma_{33}$

3) viene posto $\epsilon_x = \epsilon_{11}$; $\epsilon_y = \epsilon_{22}$; $\epsilon_z = \epsilon_{33}$; $(1/2)\gamma_{xy} = \epsilon_{12}$ eccetera.

In questo modo il tensore degli sforzi viene indicato con σ_{ij} e il tensore delle deformazioni con ϵ_{ij}.

4) la somma $\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$, già indicata con e viene indicata con ϵ_{ii} sottintendendo il simbolo di sommatoria. In generale, ogni volta che un indice è ripetuto si sottintende che viene eseguita la sommatoria facendo variare quell'indice da 1 a 3.

5) Si introduce il tensore unitario

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

detto delta di Kronecker Con queste notazioni le equazioni inverse di Navier si scrivono

$$\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\epsilon_{kk}$$

(notare l'uso di un indice muto diverso da i e da j).

Deviatore degli sforzi e delle deformazioni

La relazione tra sforzi e deformazioni per materiali elastici omogenei e isotropi (legge di Hooke o equazioni di Navier) può essere posta in forma assai espressiva (e assai più mnemonica) suddividendo i tensori degli sforzi e delle deformazione in parte sferica e parte deviatorica. La parte sferica è un tensore isotropo, mentre la parte deviatorica è un tensore a traccia nulla (il che non significa che sono nulli i termini della diagonale principale ma solo che è nulla la loro somma).

Si definisce ora un deviatore degli sforzi

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\delta_{ij}\sigma_{kk}}{3}$$

e analogamente un deviatore delle deformazioni

$$\epsilon'_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{\delta_{ij}\epsilon_{kk}}{3}.$$

Le parti sferiche sono date rispettivamente da $\sigma''_{ij} = \delta_{ij}\sigma_{kk}/3$ e da $\epsilon''_{ij} = \delta_{ij}\epsilon_{kk}/3$.

Sostituendo le eq. inv. di Navier nella definizione del deviatore degli sforzi

$$\sigma'_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\epsilon_{kk} - \frac{\delta_{ij}\sigma_{kk}}{3}$$

e sostituendo l'espressione del deviatore delle deformazioni

$$\sigma'_{ij} = 2\mu\epsilon'_{ij} + \frac{2\mu}{3}\delta_{ij}\epsilon_{kk} + \lambda\delta_{ij}\epsilon_{kk} - \frac{\delta_{ij}\sigma_{kk}}{3}$$

ovvero

$$\sigma'_{ij} = 2\mu\epsilon'_{ij} + \delta_{ij}(\frac{2\mu}{3}\epsilon_{kk} + \lambda\epsilon_{kk} - \frac{\sigma_{kk}}{3}).$$

Quando $i \neq j$ si ha $\delta_{ij} = 0$ e quindi

$$\sigma'_{ij} = 2\mu\epsilon'_{ij}.$$

Quando invece $i = j$ si ha, sommando le tre equazioni e ricordando che $\sigma'_{ii} = 0$ e $\epsilon'_{ii} = 0$,

$$\sigma_{kk} = \epsilon_{kk}(2\mu + 3\lambda). \qquad (1')$$

Di solito si pone

$$2\mu + 3\lambda = 3K$$

dove K è il *modulo di elasticità di volume* o *modulo di compressione uniforme*; μ è anche detto *modulo di scorrimento*. Come si vede la (1') è identica alla (1) di pag. 29.

Scritta in questo modo la legge di Hooke, si può dire che un corpo reagisce alla deformazione in due modi: se la deformazione implica una variazione di volume, il corpo reagisce aumentando o diminuendo la sua pressione (parte sferica del tensore degli sforzi); se invece la deformazione implica una variazione di forma il corpo reagisce con la corrispondente componente del deviatore degli sforzi. Così la variazione di volume non coinvolge la variazione di forma e le singole componenti del tensore degli sforzi sono disaccoppiate tra loro.

Tale conclusione è però vera solo per i corpi isotropi.

Si dimostra facilmente che il lavoro compiuto da una tensione idrostatica per effetto del deviatore delle deformazioni è nullo e che tale è anche il lavoro compiuto da una tensione deviatorica per effetto di una deformazione sferica. Infatti

$$\sigma'_{ij}\epsilon''_{ij} = \sigma'_{ij}\delta_{ij}\epsilon_{kk}/3 = \sigma'_{ii}\epsilon_{kk}/3 = 0$$

in quanto $\sigma'_{ii} = 0$ Così anche l'energia elastica si suddivide tra un'aliquota relativa alla variazione di volume e un'aliquota relativa alla variazione di forma .

$$\phi_v = \frac{1}{2}\sigma_{ii}\epsilon_{ii}$$

$$\phi_f = \frac{1}{2}\sigma'_{ik}\epsilon'_{ik}.$$

Si noti infine che il coefficiente $K = E/(3(1-2\nu))$ è il reciproco del coefficiente di comprimibilità isoterma che vale 6.4×10^{-12} m^2/N per il ferro e 4.6×10^{-10} m^2/N per l'acqua.

Propagazione delle onde

Si ricorda che nei solidi sono possibili due tipi di onde elastiche:

- onde rotazionali o di distorsione, caratteristiche dei solidi, che si propagano con velocità

$$v_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

- onde irrotazionali o di dilatazione, presenti anche nei fluidi, che si propagano con velocità

$$v_P = \sqrt{\frac{K + (4/3)\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}.$$