3 Richiami di Resistenza dei Materiali

3.1 Analisi della tensione

Si ammette come postulato che se un corpo è sezionato lungo una qualsiasi superficie, esso rimane in equilibrio applicando alla superficie di taglio delle opportune forze $d\mathbf{F}$ distribuite. In ogni punto la tensione $\mathbf{t}$ è data da

$$\mathbf{t} = \lim_{dA \to 0} \frac{d\mathbf{F}}{dA}$$

dove dA è un elementino di superficie nell'intorno di P e $d\mathbf{F}$ è la forza su di esso agente. Le componenti di $\mathbf{t}$ rispetto alla terna ortogonale n, m, l dove n è la normale a dA sono dette componenti speciali di tensione e si indicano con

$$t_n = \sigma_n$$

$$t_l = \tau_{nl}$$

$$t_m = \tau_{nm}$$

In particolare è utile considerare le componenti speciali quando le direzioni di n, m, l coincidono (non necessariamente in quest'ordine) con quelle degli assi x, y, z

Equazioni di Cauchy

Rispondono alla domanda: Qual è la tensione su un piano di giacitura n_x, n_y, n_z (questi sono i coseni direttori della normale alla giacitura, ovvero le componenti cartesiane del versore normale alla giacitura) se sono note le componenti speciali di tensione?

Si scrivono in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} t_{nx} \\ t_{ny} \\ t_{nz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{yz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xy} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\boldsymbol{t_n} = \boldsymbol{\sigma n}$$

e in notazione di Einstein

$$t_{ni} = \sigma_{ij} n_j.$$

La matrice delle componenti speciali di tensione appare come un operatore σ che trasforma vettori giaciture in vettori tensione.

Equazioni ai limiti

Basta scrivere le equazioni di Cauchy con riferimento alla pressione esterna. In questo caso $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ sono i coseni direttori della normale alla superficie esterna.

Proprietà di simmetria delle tensioni tangenziali

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}$$

Equazioni indefinite dell'equilibrio

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0$$

eccetera, che si possono anche scrivere come

$$div\ \sigma + \mathbf{F} = 0$$

Direzioni principali di tensione.

Principale è quella direzione tale che sulla giacitura ad essa normale non siano presenti tensioni tangenziali, ma al massimo tensioni normali.

Ciò significa che il vettore tensione è parallelo al vettore giacitura, e quindi le direzioni principali sono gli autovettori dell'operatore $\boldsymbol{\sigma}$. Le tensioni principali sono i relativi autovalori.

Stati piani di tensione

1) uno stato di tensione è piano quando al variare della giacitura il vettore tensione giace sempre in un piano (piano delle tensioni)

2) uno stato di tensione è piano quando esiste una giacitura sulla quale non vi è tensione nè normale nè tangenziale. Questo piano coincide col piano delle tensioni sopra definito.

Le due definizioni qui date sono equivalenti.

I due casi più importanti di stato piano di tensione sono:

- lastra o membrana di piccolo spessore, in cui il piano delle tensioni coincide punto per punto col piano tangente.
- solido di de Saint Venant in cui il piano scarico è parallelo all'asse del solido e alla direzione punto per punto della τ sulla sezione normale.

Cerchi di Mohr

Se sul piano σ, τ si rappresentano, con le convenzioni seguenti, le tensioni agenti su tutte le giaciture di un certo fascio i punti rappresentativi giacciono su archi di circonferenza.

Particolare importanza hanno i cerchi di Mohr per fasci di giaciture aventi per sostegno una direzione principale di tensione (cerchi principali di Mohr).

Convenzioni: 1) Le σ di trazione sono positive, quelle di compressione negative. 2) Le τ che inducono una rotazione oraria del cubetto sono positive.

Ricerca delle tensioni principali su un cerchio principale di Mohr: posto che z sia una direzione principale e che siano note σ_x, σ_y e τ_{xy},

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}^2}$$