2 Deformazione

2.1 Teoria della deformazione

Spostamento

Dato un punto P che dopo la deformazione si sposta in P', si definisce spostamento il vettore P'-P. Se in ogni punto del corpo si applica il vettore spostamento si definisce una funzione vettoriale spostamento s equivalente a tre funzioni scalari del punto u, v, w. Se queste si sviluppano in serie di Taylor nelle vicinanze di un punto O, assunto come origine, per l'ipotesi di piccolezza degli spostamenti ci si limita al termine lineare e si ottiene

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_O \\ v_O \\ w_O \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

La matrice è la somma di una parte antisimmetrica (che rappresenta una rotazione rigida) e in una parte simmetrica (deformazione pura).

Lo spostamento dovuto alla deformazione pura, le cui componenti sono indicate con apice, è:

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

La matrice $\boldsymbol{\epsilon}$ delle componenti speciali di deformazione appare come un operatore che trasforma i vettori posizione nei corrispondenti vettori spostamento.

Se si definisce ϵ_i l'allungamento nella direzione i e γ_{ij} la variazione dell'angolo tra le direzioni i e j, inizialmente ortogonali, si dimostra che è:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

Quindi la matrice $\boldsymbol{\epsilon}$ si scrive

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \epsilon_z \end{pmatrix}.$$

Si noti che, per $i \neq j$, risulta $\epsilon_{ij} = (1/2)\gamma_{ij}$.

Direzioni principali

Un punto P nell'intorno di O individua una direzione principale OP se dopo la deformazione pura si porta in P* tale da essere allineato con O e P.

Ciò significa che il vettore spostamento è parallelo al vettore posizione e quindi le direzioni principali sono gli autovettori dell'operatore ϵ.