19.7 Verifica delle ruote dentate

La verifica di resistenza degli ingranaggi deve essere eseguita per le due condizioni:

- di usura del dente per lo strisciamento col dente compagno,
- di rottura del dente per carico di fatica.

Per quanto riguarda il calcolo l'usura, questa più precisamente è riferito alla resistenza ad un particolare tipo di usura per fatica, detta *pitting*, dovuta alla ripetizione della pressione di contatto.

Per il calcolo della resistenza al pitting si valuta la pressione massima sul fianco dei denti, applicando la legge di Hertz sul contatto di due superfici tenendo conto di tutte le cause di sovraccarico. Questo risultato viene poi confrontato con la resistenza la pitting, opportunemente corretta per l'ingranaggio in esame.

Per il calcolo a fatica, si noti che il dente non è sempre in presa, per cui risulta soggetto a carichi ripetuti *dallo zero*. Il carico agente sul dente è essenzialmente flessionale e si deve tener conto dell'effetto d'intaglio.

I metodi di calcolo degli ingranaggi sono pressocché infiniti.

A parte i metodi più primitivi e del tutto superati, tra gli autori che negli ultimi cinquant'anni si sono occupati dell'argomento vanno citati Elley e Pedersen, Almen e Straub, Niemann ed Henriot. Il piú attivo tra gli italiani è stato il Castellani.

A seguito di questi e di innumerevoli altri studi sono state emanate la norme AGMA e ISO; queste ultime prospettano tre metodi di calcolo, di semplicità crescente e precisione decrescente, denominati A, B e C. La norma UNI 8862 ricalca essenzialmente la norma ISO C.

Qui nel seguito seguirò essenzialmente il percorso concettuale che sta dietro alla UNI 8862, quindi con grosse ulteriori semplificazioni, finalizzate comunque a rendere meno impervio l'arduo argomento.

19.7.1 Simboli

Simbolo	Denominazione e formula	unità di misura
a	Interasse di riferimento	mm
a'	Interasse di funzionamento	mm
b	Larghezza di fascia	mm
d	Diametro primitivo di riferimento $d = \frac{z m_n}{\cos\beta}$	mm
d'	Diametro primitivo di funzionamento $d'_1 = \frac{2a'}{u \pm 1}; \quad d'_2 = u d'_1$	mm
m_n	Modulo normale di riferimento	mm
u	Rapporto di ingranaggio $u = \frac{z_2}{z_2} \geq 1$	
z	Numero di denti	
α_n	Angolo di pressione normale di riferimento	°
α_t	Angolo di pressione trasversale di riferimento $\tan\alpha_t = \frac{\tan\alpha_n}{\cos\beta}$	°
α'_t	Angolo di pressione trasversale di funzionamento $\cos\alpha'_t = \frac{d\cos\alpha_t}{d'}$	°
β	Angolo d'elica di riferimento	°
β_b	Angolo d'elica di base $\sin\beta_b = \sin\beta\cos\alpha_n$	°

19.7.2 Condizione di resistenza al pitting

Il dente è soggetto a strisciamento sotto l'azione di una forza concentrata, in quanto i due denti a contatto si premono fortemente l'uno con l'altro.

Si parte dalla teoria di Hertz sui contatti localizzati, che predice il valore della pressione massima di contatto per caso di sfere ed i cilindri. In generale la distribuzione della pressione nella zona di contatto è un semiellissoide. Nel caso delle ruote dentate il contatto tra denti è schematizzabile come contatto tra due cilindri. In questo caso la zona di contatto diventa un rettangolo e la distribuzione delle pressioni un cilindro a sezione ellittica. Se P è la forza di chiusura e b la lunghezza del contatto tra i due cilindri, pari alla larghezza delle ruote, la pressione massima q_0 vale

$$q_0 = \frac{2}{\pi}\frac{P}{ab}$$

in cui a è la larghezza della zona di contatto, data da

$$a = \sqrt{4\frac{P}{b}(k_1 + k_2)\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

in cui

$$k_1 = \frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} \qquad k_2 = \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2}$$

riferiti al materiale dei due cilindri, e quindi della ruota 1 e della ruota 2, R_1 e R_2 sono i raggi di curvatura dei due cilindri, presi con il proprio segno (+ se cilindri convessi, - se cilindri concavi).

Nel caso delle ruote dentate il caso di denti a fianchi concavi si ha per le ruote a dentatura esterna; inoltre del raggio si prende sempre il valore assoluto, facendo comparire un segno $\pm$ davanti al raggio di curvatura del dente della ruota più grande (infatti, se una delle due ruote è a dentatura interna, sarà necessariamente la più grande).

quindi, sostituendo nell'espressione della pressione massima, con queste avvertenze, si ha

$$\sigma_H = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{P}{b}}\sqrt{\frac{1}{k_1+k_2}\left(\frac{1}{R_1}\pm\frac{1}{R_2}\right)}$$

La forza di chiusura P si correla in modo ovvio con la forza tangenziale F_t

$$P = \frac{F_t}{\cos\alpha}$$

essendo α l'angolo di spinta.

R_1 è il raggio di curvatura del dente della ruota più piccola e R_2 è il raggio di curvatura del dente della ruota più grande (il segno + si riferisce a dentature esterne, il segno - a dentature interne)

Il raggio di curvatura dei denti è variabile lungo il suo contorno; il calcolo si fa in corrispondenza delle primitive; tale procedura è stata raccomandata da Earle Buckingham visto che il massimo pericolo di pitting si ha proprio in quella zona, nella quale lo strisciamento è nullo e quindi si ha rottura del velo di lubrificante.

Dalla figura 138 si vede che

$$R_i = \frac{d_i}{2}\sin\alpha$$

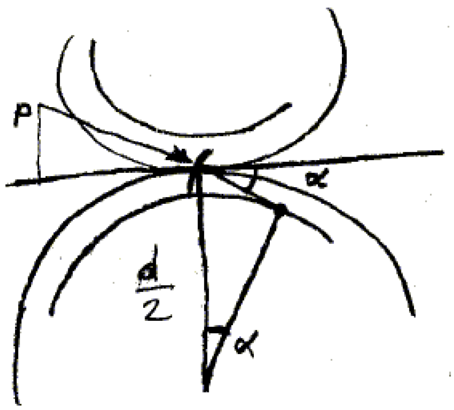

Figura 138: Curvatura del fianco del dente

Quindi

$$\frac{1}{R_1}\pm\frac{1}{R_2} = \frac{2}{\sin\alpha}\left(\frac{1}{d_1}\pm\frac{1}{d_2}\right) = \frac{2}{d_1\sin\alpha}\left(1\pm\frac{d_1}{d_2}\right) =$$
$$= \frac{2}{d_1\sin\alpha}\left(\frac{u\pm 1}{u}\right)$$

in cui u è il rapporto di ingranaggio

$$u = \frac{z_2}{z_1} = \frac{z_2}{z_1} \geq 1$$

essendo i z_i i numeri di denti.

Sostituendo il tutto nell'espressione di σ_H e riordinando, in modo da far comparire i gruppi di variabili contemplati dalla normativa, si ha

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{F_t}{d_1 b} \cdot \frac{u \pm 1}{u}} \sqrt{\frac{1}{\pi^2(k_1 + k_2)}} \sqrt{\frac{2}{\sin\alpha\cos\alpha}} \tag{1}$$

La seconda radice è il fattore di elasticità Z_E, che esplicitamente si scrive

$$Z_E = \frac{1}{\pi\left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_1}\right)}$$

La terza radice nella (1) è una forma semplificata del fattore di zona Z_H, che in tutto il suo splendore è

$$Z_H = \sqrt{\frac{2\cos\beta_b\cos\alpha_t'}{\cos^2\alpha_t\sin\alpha_t'}}$$

Per decifrare questa espressione, si vedano i simboli riportati sopra.

Per dentature elicoidali il secondo membro della (1) deve essere moltiplicato per l'ulteriore fattore dell'angolo d'elica Z_β

$$Z_\beta = \sqrt{\cos\beta}$$

Per tener conto della distribuzione del carico tra più denti in presa il secondo membro della (1) si moltiplica ulteriormante per il fattore del rapporto di condotta Z_ϵ, per la cui espressione si veda la UNI 8862/2.

Nella (1) la F_t deve essere ulteriormente moltiplicata per tutta una serie di fattori correttivi che tengono conto dei sovraccarichi:

- K_A, fattore di applicazione al carico, che tiene conto della presenza di eventuali sovraccarichi,
- K_v, fattore dinamico, che tiene conto di eventuali velocità critiche,
- $K_{H\beta}$, fattore di distribuzione longitudinale del carico
- $K_{H\alpha}$, fattore di distribuzione trasversale del carico

La determinazione di questi fattori è abbastanza laboriosa, non per la presenza di difficoltà concettuali, ma per una certa lunghezza dei calcoli. Si rimanda alla citata norma UNI.

La (1) diventa finalmente

$$\sigma_H = Z_H Z_E Z_\epsilon Z_\beta \sqrt{\frac{F_t}{d_1 b} \cdot \frac{u \pm 1}{u}} \sqrt{K_A K_v K_{H\beta} K_{H\alpha}} \tag{2}$$

La condizione di resistenza al pitting si scrive allora

$$\sigma_H \leq \sigma_{HP}$$

in cui la pressione di contatto ammissibile σ_{HP} si ricava dalla pressione limite base di fatica superficiale σ_{Hlim} con l'impiego di tutta una serie di fattori correttivi:

$$\sigma_{HP} = \frac{\sigma_{Hlim} Z_N}{S_{Hlim}} Z_L Z_R Z_v Z_W Z_X$$

in cui

- Z_N è il fattore di durata
- Z_L è il fattore di lubrificazione
- Z_R è il fattore di rugosità
- Z_v è il fattore di velocità
- Z_W è il fattore del rapporto tra le durezze
- Z_X è il fattore di dimensione

Per i valori di questi fattori, rimando alla norma UNI; sottolineo solo che il fattore di durata tiene conto che per durate limitate è consentito uno sforzo superiore a quello del limite di fatica, mentre il fattore di dimensione, concettualmente analogo al fattore di effetto grandezza, viene dalla norma posto sempre uguale ad 1.

19.7.3 Condizione di resistenza a rottura del dente per fatica

Il dente della ruota si comporta essenzialmente come una mensola incastrata alla base e sollecitata all'estremità da una forza concentrata. Si destano quindi in esso sforzi di flessione e di compressione.

Nel calcolo a rottura si trascura innanzitutto l'aliquota compressiva, dovuta alla componente assiale della forza, in quanto, come ogni compressione, essa tende a chiudere le eventuali cricche di fatica che si destassero, per cui trascurarla va a vantaggio di sicurezza.

Nel calcolare gli sforzi da momento flettente si schematizza il dente come una mensola a sezione triangolare con angolo al vertice di 60° e tangente internamente all'effettivo profilo, come in fig. 139.

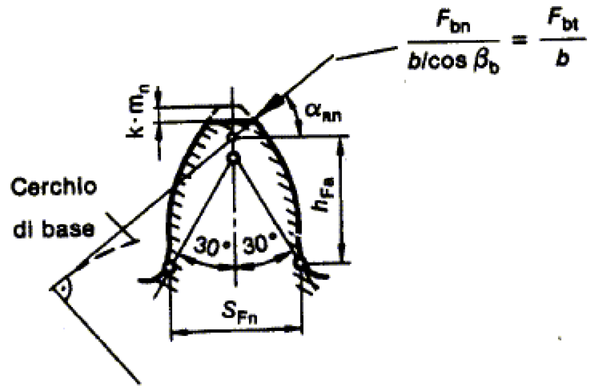

Figura 139: Calcolo del dente a flessione

Si considera inoltre, sempre a vantaggio di sicurezza, che vi sia una sola coppia di denti in presa e che la forza agisca proprio all'estremità del dente. Tale forza vale ovviamente $F_t/\cos\alpha$, ma la sua inclinazione rispetto alla normale all'asse del dente vale α_{an} in quanto il contatto critico avviene quando i denti si toccano lontano dalle primitive. Tale angolo α_{an} risulta maggiore dell'angolo di spinta α_a della quantità γ di fig, 140, che è lo spostamento angolare dell'asse del dente in condizione di incipiente ingranamento rispetto alla posizione del unto di contatto tra le primitive.

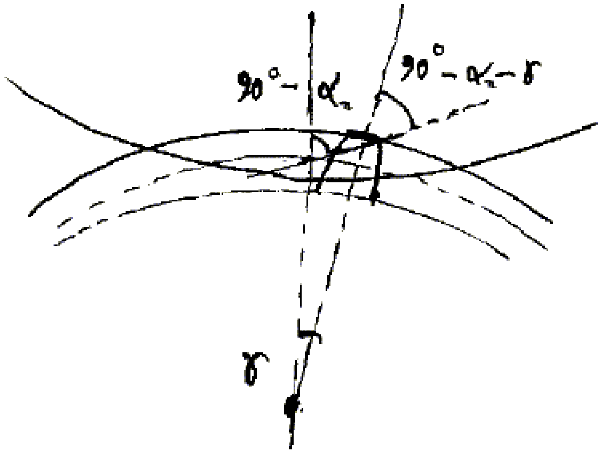

Figura 140: L'inclinazione tra forza trasmessa ed asse del dente risulta maggiore in condizione di incipiente ingranamento che in condizione di contatto centrale, e precisamente maggiore di un angolo γ, che costrituisce anche la differenza $\alpha_{an} - \alpha_n$.

La forza viene trasportata lungo la sua retta d'azione fino a incidere sull'asse del dente; con ciò l'altezza della mensola vale h_{Fa}. Il momento agente sulla sezione d'incastro è dato da questa altezza moltiplicata per la componente tangenziale della forza, e per ottenere il massimo valore della tensione occorre ulteriormente dividere per il modulo di resistenza. Si ha allora:

$$\sigma_F = h_{Fa} \times \frac{F_t}{\cos\alpha_n} \cos\alpha_{an} \times \frac{6}{bS_{Fn}}$$

Adimensionalizzando rispetto al modulo normale m_n si ha

$$\sigma_F = \frac{F_t}{bm_n} \times \frac{6(h_{Fa}/m_n)\cos\alpha_{an}}{(S_{Fn}/m_n)^2\cos\alpha_n} \tag{3}$$

La seconda frazione della (3) è il fattore di forma del dente Y_{Fa}, che dipende dal tipo di dentatura (normale o corretta) e dal numero dei denti. Come al solito il calcolo è lungo ed è facilitato da appositi abachi.

Per il calcolo della σ_F occorre tenere conto di altri tre fattori moltiplicativi:

- Y_{Sa}, fattore di correzione della tensione, che non è altro che il fattore teorico d'intaglio,
- Y_ϵ, fattore del rapporto di condotta, che tiene conto che possono esser in presa più denti contemporaneamente,
- Y_β, fattore dell'angolo d'elica, usato per dentature elicoidali.

Nella (3) la F_t deve essere ulteriormente moltiplicata per tutta una serie di fattori correttivi che tengono conto dei sovraccarichi:

- K_A, fattore di applicazione al carico, che tiene conto della presenza di eventuali sovraccarichi
- K_v, fattore dinamico, che tiene conto di eventuali velocità critiche, (questi primi due fattori sono identici a quelli già definiti per la resistenza al pitting),
- $K_{F\beta}$, fattore di distribuzione longitudinale del carico per la tensione al piede,

- $K_{F\alpha}$, fattore di distribuzione trasversale del carico per la tensione al piede.

Anche per questi fattori si rimanda alla normativa.

La (3) diventa finalmente

$$\sigma_F = \frac{F_t}{bm_n} Y_{Fa} Y_{Sa} Y_\epsilon Y_\beta (K_A K_v K_{F\beta} K_{F\alpha}) \tag{4}$$

La condizione di resistenza a rottura del dente per flessione si scrive allora

$$\sigma_F \leq \sigma_{FP} \tag{5}$$

in cui la resistenza a fatica ammissibile σ_{FP} si ricava dal limite base di fatica σ_{Flim} con l'impiego di tutta una serie di fattori correttivi:

$$\sigma_{FP} = \frac{\sigma_{Flim} Y_{ST} Y_{NT}}{S_{Flim}} Y_{\delta relT} Y_{RrelT} Y_X \tag{4}$$

in cui

- Y_{NT} è il fattore di durata
- Y_{ST} è il fattore assoluto di correzione della tensione riferito alle dentature di prova e posto sempre uguale a 2,
- $Y_{\delta relT}$ è il fattore relativo di sensibilità all'intaglio
- Y_{RrelT} è il fattore relativo allo stato della superficie del raccordo al piede del dente relativo a quello delle dentature di prova,
- Y_X è il fattore di dimensione per la tensione al piede.

Per i valori di questi fattori, rimando alla norma UNI.

Materiali per ruote dentate

Mi limito a riportare la seguente tab. 28 tratta dalla UNI 8862.

19.7.4 Progetto delle ruote dentate a resistenza a flessione

Innanzitutto si riscrive la (5) usando la (4) e la (6),

$$\frac{\sigma_{Flim} Y_{ST} Y_{NT}}{S_{Flim}} Y_{\delta relT} Y_{RrelT} Y_X \geq \frac{F_t}{bm_n} Y_{Fa} Y_{Sa} Y_\epsilon Y_\beta (K_A K_v K_{F\beta} K_{F\alpha}) \tag{7}$$

In sede di progetto si iper-semplifica questa espressione dando ai vari termini dei valori 'plausibili' senza scendere in dettaglio. Si ha allora:

- $Y_{ST} = 2$;
- $Y_{NT} = 1$ per vita infinita, mentre sale fino a 2.5 per vita molto limitata;
- $S_{Flim} = 1.5$ perché non è necessario avere una sicurezza eccessiva;
- $Y_{\delta relT} \approx 1$ per geometrie usuali dell'intaglio;

Tabella 28: Materiali per ruote dentate

Materiale	Durezza superficiale	σ_{Hlim} N/mm²	σ_{Flim}* N/mm²
Acciaio non legato di base	HB = 150 HB = 200	480 550	205 200
Acciaio in getti	HB = 150	415	170
Ghisa grigia	HB = 190 HB = 230	410 460	90 100
Ghisa a grafite sferoidale	HB = 200 HB = 250	560 630	215 230
Acciaio al carbonio bonificato	HB = 150 HB = 200	560 600	240 255
Acciaio legato bonificato	HRC $\begin{cases}25\\30\end{cases}$ HB $\begin{cases}253\\286\end{cases}$	800 850	320 335
Acciaio bonificato con tempra superficiale (temprato ad induzione o alla fiamma)	HRC = 50 HRC = 55	1 320 1 370	375 415 **
Acciaio legato cementato•	HRC = 58 ÷ 62	1 650	525
Acciaio bonificato nitrurato	HV1 = 700 ÷ 850	1 450••	470

* Per tensione alterna (per esempio ruote oziose) assumere il 70% dei valori indicati. Per senso di rotazione reversibile, apportare una riduzione di minor entità.

** Valori validi per indurimenti estesi al piede del dente. Nel caso in cui l'indurimento è limitato ai fianchi del dente, il valore di σ_{Flim} è generalmente minore di quello dell'acciaio bonificato base e a volte nettamente minore.

• Valori validi per spessori efficaci di indurimento da 0,15 fino a 0,25 m_n al termine delle lavorazioni.

•• Valore valido (eccetto per gli acciai all'alluminio) per nitrurazione gassosa prolungata o per un adeguato spessore di indurimento (da 0,4 fino a 0,6 mm per m_n da 2 fino a 5 mm) e per ingranaggi con interasse modesto.

- $Y_{RrelT} \approx 1$ per rugosità usuali;
- $Y_X = 1$ per valori piccoli del modulo ($m < 5$);
- Y_ϵ al più vale 1;
- Y_β al più vale 1;
- $K_A = 1.5$ per ingranaggi non troppo sovraccaricati;
- $$K_v = \begin{cases} 1.2 & \text{per denti elicoidali} \\ 1.4 & \text{per denti diritti} \end{cases}$$

  visto che non è il caso di far funzionare ad alte velocità ingranaggi poco precisi;
- $K_{F\beta} \approx 1.5$ per non essere troppo pessimisti;
- $$K_{F\alpha} \approx \begin{cases} 1.5 & \text{per denti elicoidali} \\ 1.1 & \text{per denti diritti} \end{cases}$$

  almeno attenendosi ai valori dati dal *Manuale dell'ingegnere meccanico*.

Così la (7) diventa, per il caso di denti diritti ($m_n = m$):

$$\frac{\sigma_{Flim}}{2.6} \geq \frac{F_t}{bm} Y_{Fa} Y_{Sa}$$

Si può far comparire il momento torcente ponendo

$$F_t = \frac{2M_t}{zm}$$

in cui è chiaro che il rapporto M_t/z è uguale per le due ruote (z è il numero di denti); inoltre si adimensionalizza la larghezza b ponendo

$$b = \lambda m$$

facendo in modo che λ assuma valori di 5 per dentature grosolane, 10 per dentature ordinarie, 20 per dentature precise, fino a 80 per dentature pressocché perfette. Sostituendo ed evidenziando il modulo m si ha

$$m = \sqrt[3]{\frac{2M_t}{\lambda z (\sigma_{Flim}/2.6)}} \sqrt[3]{Y_{Fa} Y_{Sa}}$$

Il termine sotto l'ultima radice, $Y_{Fa} Y_{Sa}$, prende il posto di alcuni ben noti fattori dei calcoli di progetto del passato, cioè il fattore di Lewis $1/Y$ o quello che nell'ottantesima edizione del Colombo (risalente agli anni cinquanta) era chiamato q, ma con maggiore precisione, visto che si tiene conto dell'intaglio (e infatti i valori sono più alti).

Da calcoli fatti tenendo presente le norme si vede che il detto fattore varia col numero di denti, col proporzionamento (normale o corretto), con l'angolo di spinta e col raggio di raccordo al piede del dente; i valori vanno da 5.05 a 4.21 e quindi, una volta estratta la radice, tutto il termine vale da 1.72 a 1.62, il che significa che un valore medio di 1.67 va bene sempre.

C'è da osservare che la radice cubica che compare nella formula di progetto potrebbe divenire una radice quadrata se l alarghezza della dentatura non varia col modulo, ma è fissa, in dipendenza per esempio da necessità tecnologiche.