17.2 Teoria della lubrificazione perfetta

Facciamo le seguenti ipotesi:

- che le due superfici, l'una mobile e l'altra fissa costituenti il cuscinetto, siano separate da uno spessore di lubrificante,
- che sia trascurabile l'effetto della perdita di lubrificante lungo i bordi del cuscinetto;
- che la velocità della superficie mobile sia tale da realizzare il moto laminare del lubrificante, che cioè sia sufficientemente basso il numero di Reynolds e che quindi valga la legge di Newton.

Consideriamo il lubrificante compreso tra due superfici piane delle quali la superiore sia fissa e l'inferiore sia mobile von velocità costante V.

Siano fissati due assi ortogonali, Ox orizzontale coincidente con la traccia della superficie fissa e Oy verticale, positivo verso il basso, ossia in direzione della superficie mobile.

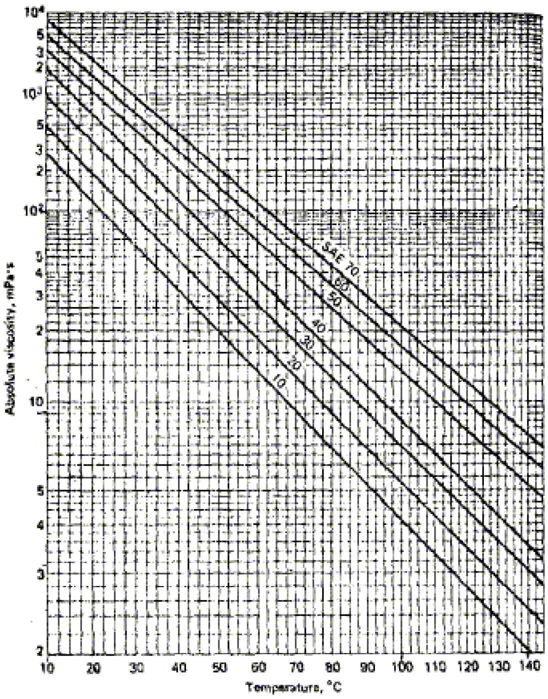

Figura 105: Variazione della viscosità dinamica con la temperatura per oli SAE

Ciascuno degli strati elementari di altezza $\mathrm{d}y$ in cui potremo immaginare diviso il lubrificante si muove con velocità u funzione di y.

Consideriamo un elementino di liquido contiguo al punto M (fig. 109) e di volume $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ (la lunghezza secondo z si intende uguale ad 1).

A regime esso si muove di moto uniforme con velocità u.

Le forze che agiscono sull'elemento considerato sono dovute alla pressione del fluido e all'attrito interno che, per quanto già detto, è espresso dalla legge di Newton. Si ha perciò, indicando come al solito con $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ i versori degli assi x e y:

- sulla faccia 1
$$+p\mathrm{d}y\ \mathbf{i}$$
- sulla faccia 2
$$-\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\ \mathbf{i}$$
- sulla faccia 3
$$+p\mathrm{d}x\ \mathbf{j}-\mu\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}x\ \mathbf{i}$$
- sulla faccia 4
$$-\left(p+\frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\ \mathbf{j}+\mu\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}+\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}y^2}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\ \mathbf{i}$$

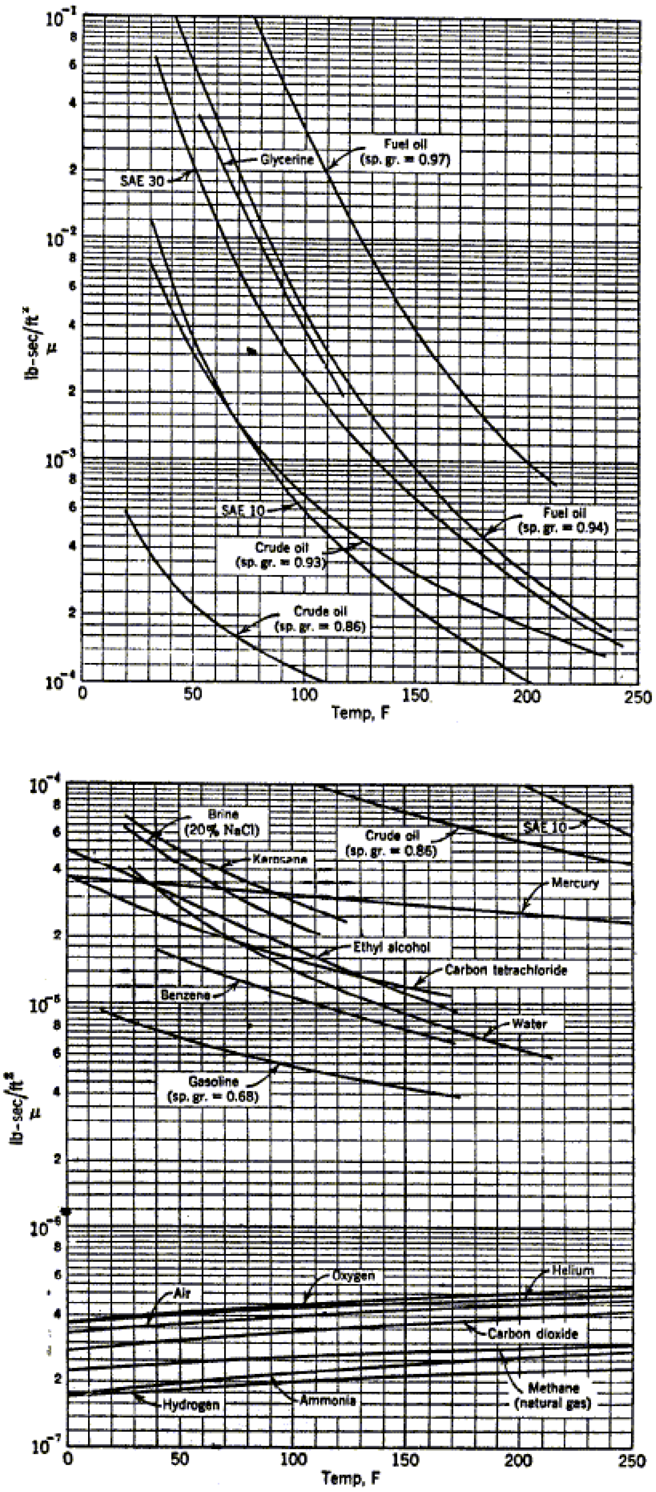

Figura 106: Viscosità dinamica in funzione della temperatura per vari fluidi. Per la conversione: $\frac{T}{°C} = \frac{5}{9}\left(\frac{T}{°F} - 32\right)$; $\frac{1 \mathrm{lb\ s}}{\mathrm{ft}^2} = 47.88$ Pa s

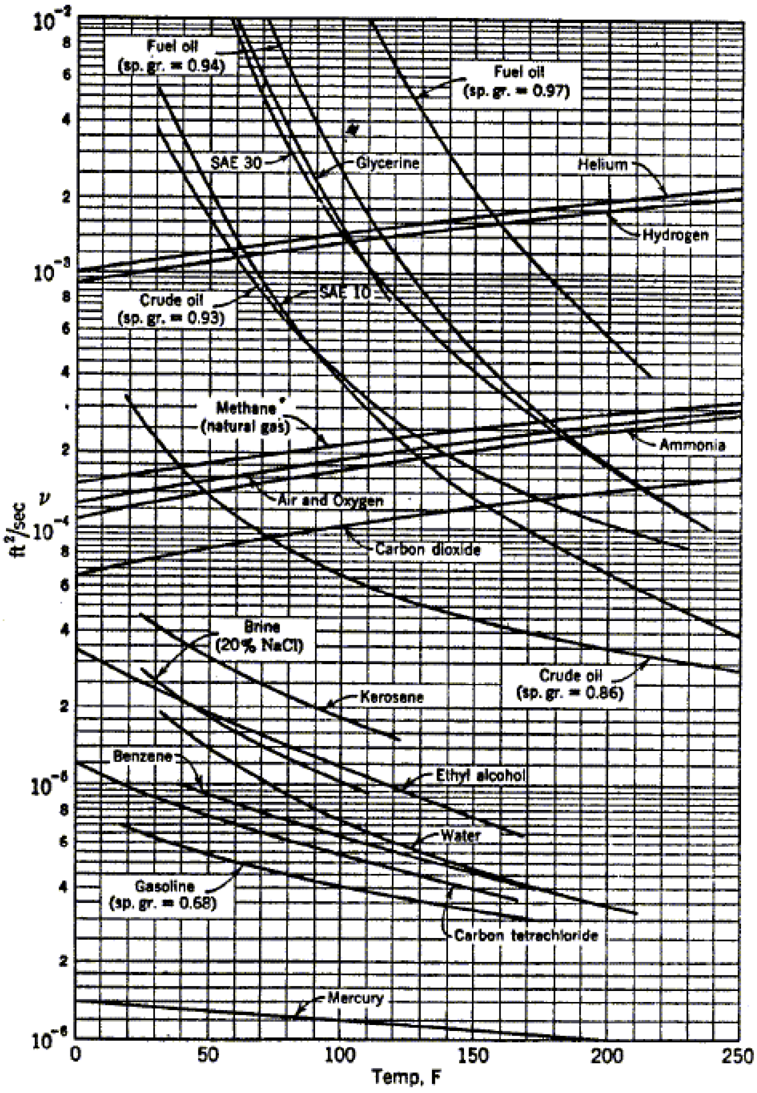

Figura 107: Viscosità cinematica in funzione della temperatura per vari fluidi

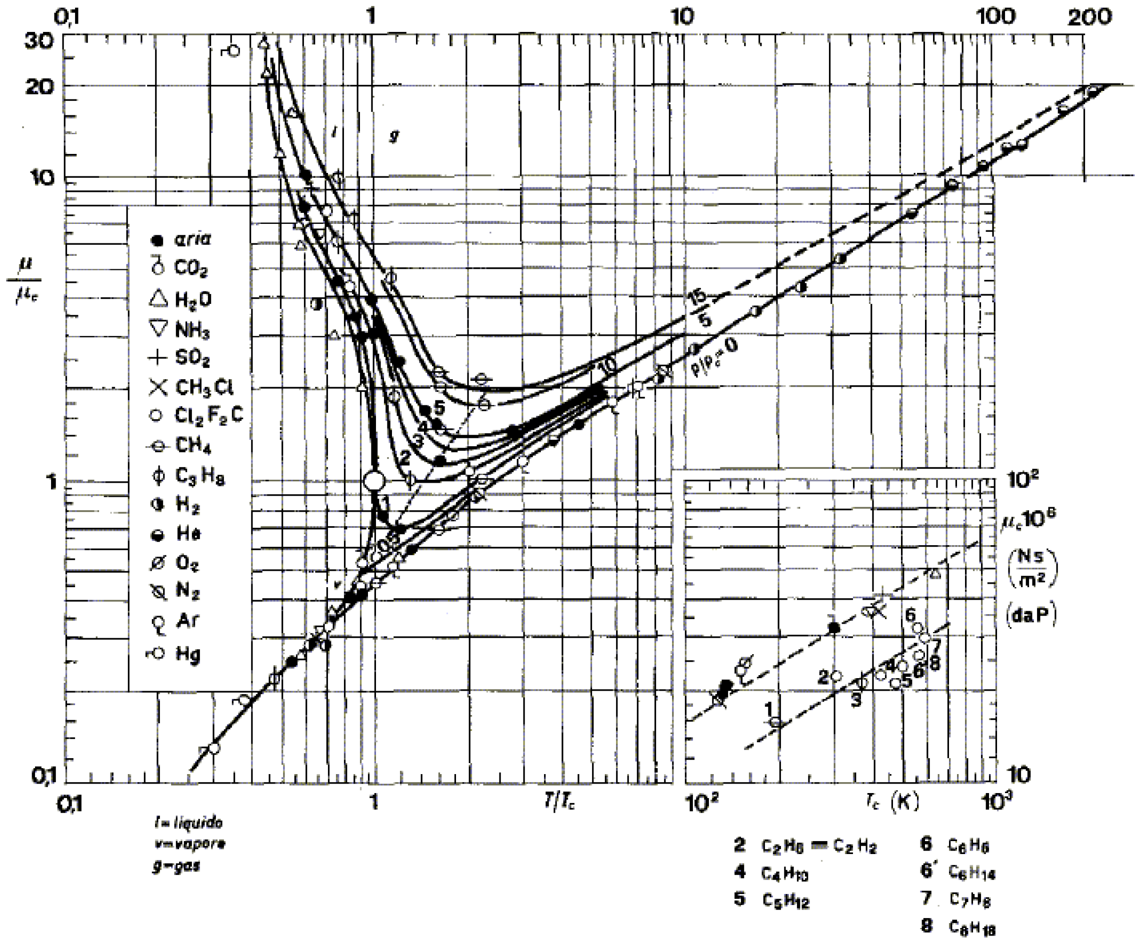

Figura 108: Viscosità dinamica in coordinate adimensionali. Da Codegone, C., *Atti Acc. Scienze*, Torino, **86**, 1951–52, citato in *Enciclopedia dell'Ingegneria*, vol I, p. **2**-260.

Le condizioni di equilibrio si scrivono imponendo che siano uguali a zero le somme delle componenti delle forze lungo i due assi, ossia:

$$\mu\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}y^2} - \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

dalla quale ultima si ricava che p non è funzione di y, per cui nella prima si scrive il segno di derivata totale al posto di quello di derivata parziale, ottenendo:

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}y^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \tag{1}$$

che, secondo il Ferretti (1966), rappresenta l'equazione fondamentale della lubrificazione.

Integrando la (1), e tenendo presente che $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$ è indipendente da y, si ha successivamente

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}y + C_1$$

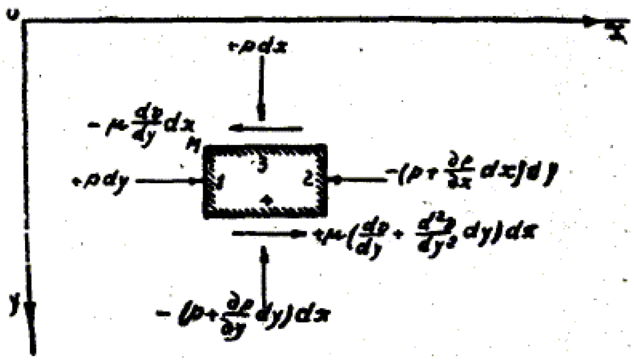

Figura 109: Elemento di fluido per la deduzione dell'equazione di Reynolds

$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}y^2 + C_1 y + C_2$$

Imponendo le condizioni al contorno ($u = 0$ per $y = 0$ e $u = V$ per $y = h$) si ha

$$C_2 = 0 \qquad C_1 = -\frac{1}{2\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}h + \frac{V}{h}$$

e quindi

$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(y^2 - hy) + \frac{V}{h}y \tag{2}$$

La velocità ha dunque andamento quadratico e consta di due termini: uno lineare, l'altro parabolico. Questo può essere sia positivo che negativo, quindi si può aggiugere o sottrarre al termine lineare e ciò in dipendenza da $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$. In tulle le sezioni esso si annulla a $y = 0$ e a $y = h$; e si annulla identicamente nella sezione dove p è massima.

Consideriamo ora la portata volumetrica di fluido Q lungo il meato. Tenendo conto della (2) sarà:

$$Q = \int_0^h u\mathrm{d}y = -\frac{1}{12\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}h^3 + V\frac{h}{2}$$

Per continuità, avendo supposte nulle le fughe laterali, Q dovrà essere costante lungo x, quindi

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{h^3}{12\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right) + \frac{V}{2}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = 0$$

ovvero

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{h^3}{\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right) = 6V\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}$$

che è la classica equazione di Reynolds per il flusso unidimensionale. Quando si consideri anche il flusso in direzione z, ossia le perdite laterali, uno sviluppo simile porta all'equazione di Reynolds per il flusso bidimensionale:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{h^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}\right) = 6V\frac{\partial h}{\partial x}$$

Per i cuscinetti molto corti, entrati da poco nell'uso comune, Ocvirk ha proposto di trascurare nell'equazione precedente il termine x, per cui si ha:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{h^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}\right) = 6V\frac{\partial h}{\partial x}$$

Questa equazione, a quanto pare, si integra molto facilmente. Tale metodo è chiamato *approssimazione del cuscinetto corto di Ocvirk.*