13.3 Appendice

Equazione differenziale dello spostamento e sua integrazione

Si ricorda che le equazioni inverse di Navier sono:

$$\sigma_t = 2G\big(\epsilon_t + \frac{\nu}{1-2\nu}e\big)$$

eccetera, essendo

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$e = \epsilon_t + \epsilon_r + \epsilon_z$$

Derivando la prima eq. inv. di Navier

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = 2G\big(\frac{d\epsilon_r}{dr} + \frac{\nu}{1-2\nu}\frac{de}{dr}\big)$$

Sottraendo la prima eq. inv. di Navier dalla seconda e dividendo per r,

$$\frac{\sigma_t - \sigma_r}{r} = 2G\big(\frac{\epsilon_t - \epsilon_r}{r}\big)$$

Nelle due ultime espressioni i primi membri sono uguali per l'equazione di equilibrio; sono dunque uguali anche i secondi membri, cioè

$$\frac{d\epsilon_r}{dr} + \frac{\nu}{1-2\nu}\frac{de}{dr} = \frac{\epsilon_t - \epsilon_r}{r} \tag{1}$$

Derivando ora le espressioni di ϵ_t ed ϵ_r prese dalle eq. di congruenza e ricordando che ϵ_z è uniforme su tutta la sezione ossia non varia con r, si ha:

$$\frac{de}{dr} = \frac{d\epsilon_r}{dr} + \frac{d\epsilon_t}{dr} + \frac{d\epsilon_z}{dr} = \frac{d\epsilon_r}{dr} - \frac{\epsilon_t - \epsilon_r}{r} + 0$$

confrontando con la (1) si ha

$$\frac{de}{dr} = 0 \tag{2}$$

che è l'espressione cercata. Sapendo che

$$\frac{d\epsilon_z}{dr} = 0$$

si ricava dalla (2)

$$\frac{d(\epsilon_t + \epsilon_r)}{dr} = 0 \tag{3}$$

che si trova più spesso scritta in termini di spostamento

$$\frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} + \frac{d^2u}{dr^2} = 0$$

Per l'integrazione poniamo

$$u = r^\alpha$$

da cui

$$\frac{du}{dr} = \alpha r^{\alpha-1}$$

$$\frac{d^2u}{dr^2} = \alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2}$$

quindi

$$\alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2} + \frac{1}{r}\alpha r^{\alpha-1} - \frac{1}{r^2}r^\alpha = 0$$

che, dividendo per $r^{\alpha-2}$ dà luogo ad un'equazione algebrica in α la cui soluzione è $\alpha = \pm 1$.

La soluzione generale è quindi

$$u = Ar - \frac{B}{r}.$$

Più facilmente, tornando alla (3) si integri una prima volta

$$\epsilon_t + \epsilon_r = 2A$$

e si passi allo spostamento

$$\frac{u}{r} + \frac{du}{dr} = 2A$$

ossia

$$\frac{1}{r}\frac{d(ur)}{dr} = 2A$$

quindi

$$\frac{d(ur)}{dr} = 2Ar$$

e integrando ancora

$$ur = Ar^2 - B$$

ossia

$$u = Ar - \frac{B}{r}.$$

Sostituendo nelle eq. di congruenza si ha

$$\epsilon_t = A + \frac{B}{r^2}$$

$$\epsilon_r = A - \frac{B}{r^2}$$

e poi

$$\sigma_t = C_1 + \frac{C_2}{r^2}$$

$$\sigma_r = C_1 - \frac{C_2}{r^2}$$

e quindi le equazioni di Lamè.