13 Recipienti a parete spessa

13.1 Equazioni di Lamé

Si pone che lo stato tensionale sia funzione solo di r e inoltre che

- $d\sigma_z/dr = 0$
- $d\epsilon_z/dr = 0 \qquad (1)$

Le equazioni che occorrono sono:

- Equazione di equilibrio
- Equazione di congruenza. Saranno richiamete in seguito, ma di esse non si farà uso in quanto saranno sostituite dalla (1) scritta sopra.
- Legame tensione-deformazione (legge di Hooke, tradotta formalmente dalle equazioni di Navier)

13.1.1 Equazione di equilibrio

Si consideri un elementino come in fig. 72 e di altezza unitaria lungo z. Si dimostra che le direzioni r, θ e z sono direzioni principali, per cui sulle facce dell'elementino non vi sono tensioni tangenziali. Se ne faccia l'equilibrio alla traslazione lungo r (tutte le altre equazioni di equilibrio si riducono ad identità). Tale equazione si scrive:

$$-\sigma_r r \mathrm{d}\theta + \left(\sigma_r + \frac{\mathrm{d}\sigma_r}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}r\right)(r + \mathrm{d}r)\,\mathrm{d}\theta - 2\sigma_t \mathrm{d}r \sin\frac{\mathrm{d}\theta}{2} = 0$$

Innanzitutto si può identificare il seno col suo argomento; ciò comporta la comparsa di un $\mathrm{d}\theta$ a fattor comune, che quindi si semplifica. Sviluppando la parentesi si ottiene un termine finito $\sigma_r r$che si semplifica col preesistente $-\sigma_r r$ e un termine in $\mathrm{d}r^2$ che si trascura in quanto infinitesimo di ordine superiore. Raccogliendo i termini in $\mathrm{d}r$, eliminando il fattor comune $\mathrm{d}r$ e raccogliendo si ha:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{\sigma_t - \sigma_r}{r}$$

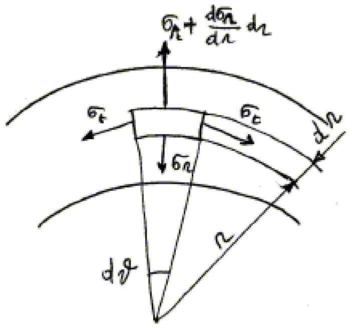
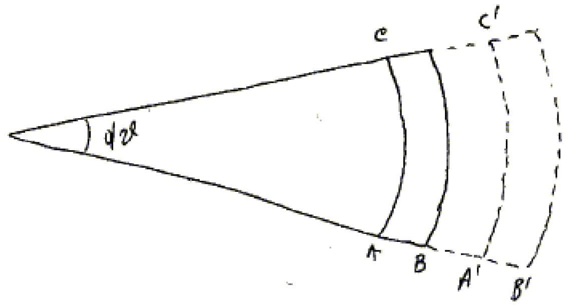


Figura 72: Costruzione per l'equazione di equilibrio.

13.1.2 Equazioni di congruenza

Vedi fig. 73



$$\varepsilon_r = \frac{(B'-A')-(B-A)}{B-A} =$$

$$= \frac{(B'-B)-(A'-A)}{B-A} = \frac{u+du-u}{dr} = \frac{du}{dr}$$

$$\varepsilon_t = \frac{\widehat{A'C'}-\widehat{AC}}{\widehat{AC}} = \frac{(r+u)\,d\vartheta - r\,d\vartheta}{r\,d\vartheta} = \frac{u}{r}$$

Figura 73: Equazioni di congruenza per recipienti cilindrici di grosso spessore

Si considera diversa da zero una sola componente dello spostamento, ossia la u (le altre sono nulle per ragioni di simmetria). Risulta:

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr}$$
$$\epsilon_t = \frac{u}{r}$$

13.1.3 Equazioni di Navier (legame tensione-deformazione)

Si noti che rimangono formalmente identiche a quelle in coordinate cartesiane.

$$E\epsilon_t = \sigma_t - \nu(\sigma_r + \sigma_z)$$
$$E\epsilon_r = \sigma_r - \nu(\sigma_t + \sigma_z)$$
$$E\epsilon_z = \sigma_z - \nu(\sigma_t + \sigma_r)$$

Queste relazioni, che esprimono in sostanza la legge di Hooke, sono, secondo Franciosi, dovute al Navier (1821).

13.1.4 Equazione differenziale della tensione

Derivando rispetto ad r l'ultima equazione di Navier si ha

$$\frac{d}{dr}(\sigma_t + \sigma_r) = 0$$

da cui

$$\sigma_t + \sigma_r = 2C_1 \tag{1}$$

Dalla equazione dell'equilibrio si ricava subito

$$r\frac{d\sigma_r}{dr} = \sigma_t - \sigma_r. \tag{2}$$

Eliminando σ_t dalle (1) e (2) si ha

$$r\frac{d\sigma_r}{dr} + 2\sigma_r = 2C_1.$$

Il primo membro di questa espressione è

$$\frac{1}{r}\frac{d(\sigma_r r^2)}{dr}$$

cosicché separando le variabili

$$d(\sigma_r r^2) = 2C_1 r dr$$

e integrando

$$\sigma_r r^2 = C_1 r^2 - C_2,$$

e ancora

$$\sigma_r = C_1 - \frac{C_2}{r^2}$$

$$\sigma_t = C_1 + \frac{C_2}{r^2}$$

Le due costanti C_1 e C_2 si ottengono imponendo le condizioni al contorno

$$\sigma_r = -p_i \text{ per } \ r = r_i$$

$$\sigma_r = -p_e \text{ per } \ r = r_e$$

In definitiva si ha

$$C_1 = \frac{p_i r_i^2 - p_e r_e^2}{r_e^2 - r_i^2}$$

$$C_2 = (p_i - p_e)\frac{r_i^2\ r_e^2}{r_e^2 - r_i^2}.$$

Le espressioni di σ_t e σ_r sono dette equazioni di Lamé, che si scrivono per esteso:

$$\sigma_t = \frac{p_i r_i^2 - p_e r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} + (p_i - p_e)\frac{r_i^2 r_e^2}{r_e^2 - r_i^2}\frac{1}{r^2}$$

$$\sigma_r = \frac{p_i r_i^2 - p_e r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} - (p_i - p_e)\frac{r_i^2 r_e^2}{r_e^2 - r_i^2}\frac{1}{r^2}$$

Per quanto riguarda σ_z la procedura precedente non ci illumina; ragionando in termini di equilibrio globale si ottengono i due valori

$$\sigma_z = \frac{p_i r_i^2 - p_e r_e^2}{r_e^2 - r_i^2}$$

valida per fondi di pezzo o flangiati sul mantello e

$$\sigma_z = 0$$

per fondi con tiranti. In quest'ultimo caso però, poiché i tiranti sono pre-tesi mentre la spinta sui fondi dipende dalla pressione, la tensione del mantello può anche essere negativa. Anzi, un piccolo valore negativo della tensione è necessario per il corretto funzionamento delle guarnizioni.

Un esempio dell'andamento delle tensioni è dato nella fig. 74

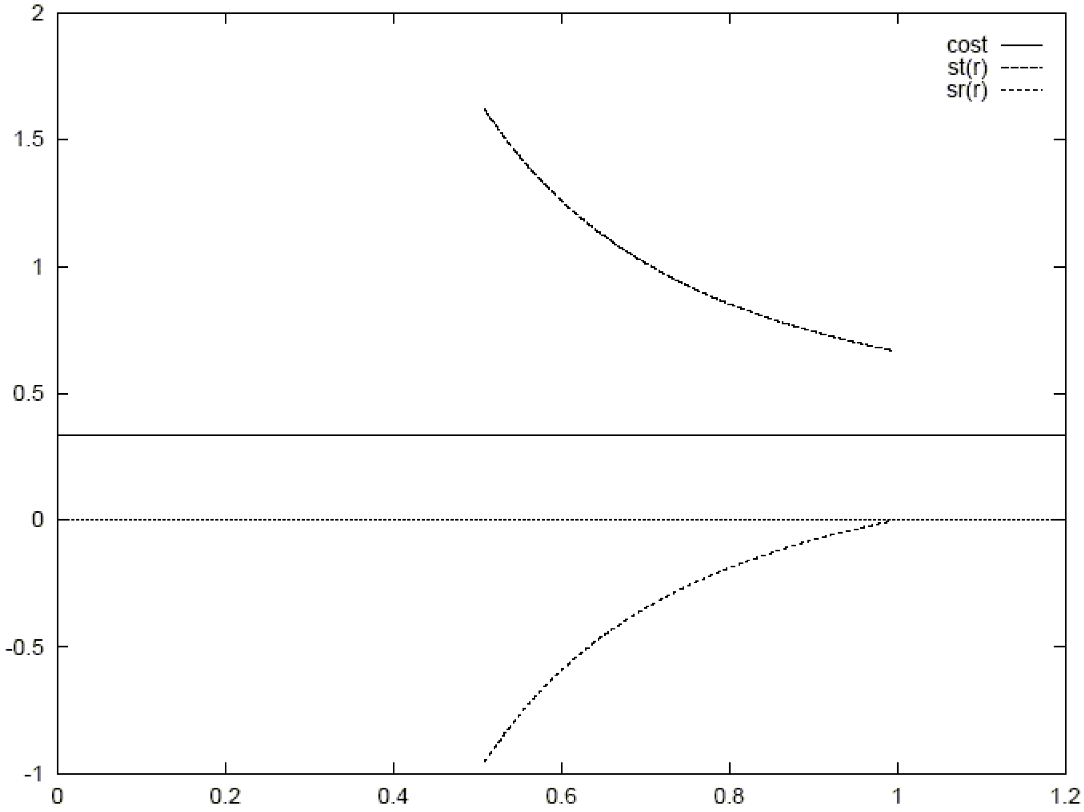


Figura 74: Diagramma delle tensioni in un recipiente di grosso spessore. In ascisse c'è r/r_e, in ordinata σ/p_i; la pressione esterna è nulla e $r_i/r_e = 0.5$.