## 12.2 Equazioni di equilibrio

La prima equazione si ottiene imponendo l'equilibrio di una porzione di superficie, sufficientemente piccola e limitata da due archi di meridiano AD e BC (fig. 67) a distanza angolare $d\alpha$ e da due archi di normale AB e CD a distanza angolare $d\theta$.

Le lunghezze dei due lati del rettangoloide sono quindi $r_n d\alpha$ (i lati AB e CD) ed $r_m d\theta$ (i lati BC e AD).

Si impone l'equilibrio nella direzione $z$ normale alla superficie considerando positive le forze dirette verso l'esterno. Si ha perciò :

- forze di pressione:
$$+(p_i - p_e) r_n d\alpha \; r_m d\theta$$
- forze agenti sui lati meridiani BC e AD :

  Sui due meridiani agiscono solo forze normali $\sigma_n$ perchè la perpendicolare al meridiano, ossia la normale, è una direzione principale; inoltre queste forze sono rivolte verso l'interno, da cui il

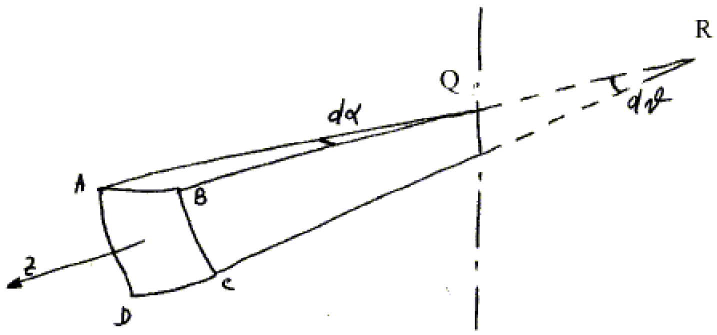


Figura 67: Elementino di superficie di rivoluzione, per ricavare l'equazione di Laplace.

segno meno. Si trascurano inoltre, data la piccolezza dell'elemento, la differenza tra le tensioni agenti sui due lati opposti e la differenza delle lunghezze dei medesimi lati. Si ha quindi :

$$-2\sigma_n r_m d\theta \; s \sin\frac{d\alpha}{2}$$

- forze agenti sui lati normali AB e CD: si ragiona in modo analogo al caso precedente e si ha:

$$-2\sigma_m r_n d\alpha \; s \sin\frac{d\theta}{2}$$

Sommando i tre contributi, sostituendo al seno degli angoli piccoli il valore dell'argomento, e dividendo per i fattori comuni $d\alpha \; d\theta$ si ha:

$$(p_i - p_e) r_n r_m - \sigma_n r_m s - \sigma_m r_n s = 0$$

da cui:

$$\frac{\sigma_n}{r_n} + \frac{\sigma_m}{r_m} = \frac{(p_i - p_e)}{s} \tag{1}$$

La (1) è detta *equazione di Laplace*.

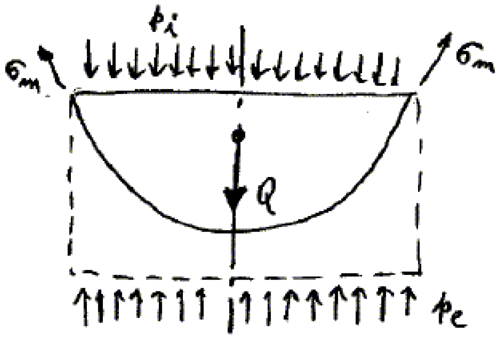


Figura 68: Equilibrio globale in un caso particolare

La seconda equazione si ottiene come equilibrio di una porzione di superficie contenente un polo, come in fig. 68, per cui

$$\sigma_m \sin\theta \; 2\pi \; r_p \; s = Q + (p_i - p_e) \; \pi \; r_p^2$$

in cui Q è la forza peso del recipiente e del fluido contenuto nel volume di controllo. Di solito peraltro il peso del recipiente si trascura e si considera solo quello del liquido. Semplificando opportunamente e ricordando che $r_n = r_p / \sin\theta$ si ha:

$$\sigma_m = \frac{(p_i - p_e) \; r_n}{2 \; s} + \frac{Q}{2\pi \; r_p s \sin\theta} \tag{2}$$

Se il fluido è un gas si può trascurare il secondo addendo del secondo membro. Se la pressione esterna è quella atmosferica si pone $p_e = 0$ misurando la $p_i$ come pressione relativa.

Questa equazione ha validità limitata a elementi della stessa topologia di quello della fig. 68; per esempio non vale per un elemento torico, come si vedrà a suo luogo.