

12 Recipienti a parete sottile

Studiando gli organi destinati a contenere fluidi (di solito pressurizzati), si parla di recipiente se il diametro è grande rispetto alla lunghezza, di tubazione se la lunghezza è molto maggiore del diametro; inoltre nelle tubazioni il diametro è 'ragionevolmente' piccolo. Tuttavia in questo corso non si farà questa distinzione, visto che dal punto di vista della resistenza meccanica i due tipi di organi sono retti dalle stesse leggi.

I recipienti a parete sottile sono quelli il cui spessore è 'sufficientemente' più piccolo del diametro (per esempio un decimo o meno). Sono studiati nell'approssimazione membranale, che consiste nel trascurare la componente radiale della tensione (che nei recipienti a grosso spessore risulta sempre di compressione), nonché gli sforzi flessionali. La teoria delle membrane si fonda dunque su questi due postulati:

1. Non vi sono sforzi normali σ su elementini di superficie paralleli al piano medio della membrana. (Ciò esclude la componente radiale della tensione);
2. Non vi sono sforzi tangenziali diretti normalmente alla superficie media, su elementini di superficie normali al piano medio della membrana, ovvero sulle sezioni radiali. Ciò esclude il taglio e quindi anche la flessione. Sono consentiti invece sforzi tangenziali diretti parallelamente al piano medio della membrana.

In questo modo una membrana diventa l'analogo bidimensionale di quello che in Fisica è il filo flessibile e inestensibile; la membrana può essere considerata come un 'tessuto' di fili flessibili e inestensibili posti perpendicolarmente gli uni agli altri (si pensi agli involucri delle mongolfiere, che un tempo erano proprio di stoffa, magari impermeabilizzata). Ovviamente la direzione delle due famiglie di fili, che per definizione non si scambiano sforzi tangenziali, risulta da determinare.

Per il postulato 1, una membrana non può resistere a forze perpendicolari al proprio piano se non in virtù della sua forma; in altri termini una membrana piana non può resistere a tali sforzi, ma può farlo solo una membrana curva.

Una delle conseguenze di quanto detto è che lo stato di tensione in una membrana è bidimensionale e che uno degli assi principali è la normale alla superficie. Infatti un cubetto, tagliato nello spessore della membrana, tale che due sue facce siano parallele al piano medio della membrana non ha:

- Né sforzo normale, perché tale componente sarebbe radiale, e quindi si trascura per il postulato 1,
- Né sforzi tangenziali, perché questi si ritroverebbero, per la proprietà di simmetria delle tensioni tangenzionali, sulle sezioni radiali della membrana in direzione radiale, dove non ci possono essere, per il postulato 2.

La stessa cosa può essere vista direttamente dai due postulati: infatti questi escludono ogni componente della tensione perpendicolare al piano medio, e quindi affermano che tutte le componenti delle tensioni devono giacere nel piano medio; questo diventa quindi il *piano delle tensioni* e quindi (per definizione) lo stato tensionale è piano.

Nel seguito ci si limiterà alle sole membrane di rivoluzione, senza perdita di generalità, visto che i recipienti usuali sono sempre riconducibili almeno a un insieme di membrane di rivoluzione; per esempio una tubatura con dei gomiti si può ricondurre ad un insieme di tratti cilindrici e a un insieme di tratti torici.

12.1 GEOMETRIA DEI RECIPIENTI DI RIVOLUZIONE

Una superficie di rivoluzione si ottiene facendo ruotare una curva qualsiasi, detta generatrice, intorno ad una retta detta asse. La sezione della superficie con un piano contenente l'asse è detto curva meridiana o semplicemente meridiano. Ovviamente nella pratica il meridiano coincide con la generatrice, ma vi sono dei casi in cui ciò non è vero, per esempio nel caso dell'iperbolide ad una falda, in cui la generatrice è una retta sghemba rispetto all'asse e il meridiano è ovviamente un'iperbole.

Poiché il meridiano può fungere benissimo da generatrice, si intuisce che l'intera superficie è determinata dalla forma del meridiano e che quindi dallo studio di questo si possono dedurre tutte le proprietà di quella. In particolare il meridiano è di solito una curva ben nota (una retta o una circonferenza, o simile), e se ciò non è, può sempre essere dato in coordinate cartesiane, in base ad un'ascissa lungo l'asse e un'ordinata perpendicolare all'asse.

Nei recipienti di rivoluzione, in quanto membranali, lo stato di tensione è piano e uno delle direzioni principali è la perpendicolare alla superficie. Un'altra direzione principale, in base a considerazioni di simmetria è quella meridiana, mentre la terza, perpendicolare ad entrambe, è detta direzione normale.

Di grande importanza sono i seguenti tre raggi di curvatura:

1. Raggio di curvatura del parallelo r_p , che è appunto la distanza tra il punto considerato e l'asse,
2. Raggio di curvatura del meridiano r_m , che si ottiene al solito modo, come raggio del cerchio osculatore al meridiano in quel punto,
3. Raggio di curvatura della normale r_n che si ottiene prolungando la normale alla superficie fino ad incontrare l'asse, e vale

$$r_n = \frac{r_p}{\sin \theta}$$

L'ultima relazione scritta va sotto il nome di *teorema di Meusnier de La Place*

L'angolo θ , detto colatitudine, è quello tra la normale alla superficie e l'asse di simmetria.